

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка
Фізико-математичний факультет

ISSN 2413-1571 (print)
ISSN 2413-158X (online)

ФІЗИКО- МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА

Науковий журнал

Том 41, № 2

Суми – 2026

**Рекомендовано до видання вченою радою
Сумського державного педагогічного університету імені А.С. Макаренка
(протокол № 9 від 27.04.2026 р.)**

Редакційна колегія

Олена Семеніхіна (головний редактор)	доктор педагогічних наук, професор, Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка, Україна
Марина Друшляк (заступник головного редактора)	доктор педагогічних наук, професор, Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка, Україна
Francis Kwadwo Awuah	доктор філософії з математичної освіти, викладач кафедри педагогічної освіти, Науково-технологічний університет імені Кваме Нкруми, Гана
Jacob Owusu Sarfo	доктор філософії з промови здоров'я (охорона здоров'я, фізичне виховання та рекреація), старший викладач, Університет Кейп-Кост, Гана
Igor Subbotin	доктор фізико-математичних наук, професор, Кафедра математики і природничих наук, Національний університет, США
Олена Гречановська	доктор педагогічних наук, професор, Вінницький Національний Технічний Університет, Україна
Тетяна Лукашова	доктор фізико-математичних наук, професор, Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка, Україна
Василь Швець	кандидат педагогічних наук, професор, Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Україна
Олександр Школьний	доктор педагогічних наук, професор, Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Україна
Артем Юрченко	кандидат педагогічних наук, доцент, Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка, Україна

Ф45 Фізико-математична освіта : науковий журнал. Том 41, № 2. Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Фізико-математичний факультет ; редкол.: О.В. Семеніхіна (гол.ред.) [та ін.]. Суми : [СумДПУ ім. А.С. Макаренка], 2026. 102 с.

*Наказом МОН України №1412 від 18.12.2018 р. журнал «Фізико-математична освіта» затверджено як **фахове наукове видання категорії «Б»** у галузі педагогічних наук (13.00.02 – математика, фізика, інформатика; 13.00.10) і за спеціальностями 011, 014, 015.*

Журнал індексується наукометричною базою **Index Copernicus Journals Master List**

Автори статей несуть відповідальність за достовірність наведеної інформації (точність наведених у статті даних, цитат, статистичних матеріалів тощо) та за порушення прав інтелектуальної власності інших осіб.

Висловлені авторами думки можуть не співпадати з точкою зору редакції.

**УДК 53+51]:37(051)
DOI: 10.31110/2413-1571**

© СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2026

**MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE
Makarenko Sumy State Pedagogical University
Physics and Mathematics Faculty**

**ISSN 2413-1571 (print)
ISSN 2413-158X (online)**

PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION

Scientific Journal

Vol. 41, No. 2

Sumy – 2026

**Recommended for publication by the Academic Council
of Makarenko Sumy State Pedagogical University
(Protocol No 9 from 27.04.2026)**

Editorial Board

Olena Semenikhina (editor-in-chief)	Dr. of Pedagogical Sciences, Professor, Sumy State Pedagogical University named after A.S.Makarenko, Ukraine
Maryna Drushlyak (co-editor-in-chief)	Dr. of Pedagogical Sciences, Professor, Sumy State Pedagogical University named after A.S.Makarenko, Ukraine
Francis Kwadwo Awuah	PhD in Mathematics Education, Lecturer at the Department of teacher education, Kwame Nkrumah University of Science & Technology, Ghana
Jacob Owusu Sarfo	PhD Health Promotion (Health, Physical Education and Recreation), Senior Lecturer, University of Cape Coast, Ghana
Igor Subbotin	Dr. of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Mathematics and Natural Sciences, National University, Los Angeles, USA
Olena Hrechanovska	Dr. of Pedagogical Sciences, Professor, Vinnytsia National Technical University, Ukraine
Tetyana Lukashova	Dr. of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Sumy State Pedagogical University named after A.S.Makarenko, Ukraine
Vasyl Shvets	PhD (pedagogical sciences), Professor, Dragomanov Ukrainian State University, Ukraine
Oleksandr Shkolnyi	Dr. of Pedagogical Sciences, Professor, Dragomanov Ukrainian State University, Ukraine
Artem Yurchenko	PhD (pedagogical sciences), Associate Professor, Sumy State Pedagogical University named after A.S.Makarenko, Ukraine

- F 45 Physical and Mathematical Education : Scientific Journal. Vol. 41, No. 2. Makarenko Sumy State Pedagogical University, Physics and Mathematics Faculty ; O.V. Semenikhina (chief editor). Sumy : [Makarenko Sumy State Pedagogical University], 2025. 102 p.

The authors of the articles are responsible for the authenticity of the information (the accuracy of the presented information in the article, quotations, statistical materials, etc.) and for the violation of the intellectual property rights of others.

Opinions expressed by the authors may not reflect the views of the editors.

**UDC 53+51]:37(051)
DOI: 10.31110/2413-1571**

© Makarenko Sumy State Pedagogical University, 2026

ЗМІСТ

Базурін В., Базуріна С., Колесник С., Колесник В., Дуленко Н.	6
ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ НА МОВІ C# АЛГОРИТМІВ ОБЧИСЛЕННЯ КОРЕЛЯЦІЇ ПІРСОНА, СПІРМЕНА І КЕНДАЛЛА	6
Боднарук С., Рибчинський Н.	18
АЛГОРИТМІЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ РЕВЕРСИВНОЇ ГЕНЕРАЦІЇ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ЗАВДАНЬ ЗАСОБАМИ ОБ'ЄКТНО-ОРІЄНТОВАНОГО МОДЕЛЮВАННЯ	18
Воронкін О., Лушчин С.	28
ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА ВІЗУАЛІЗАЦІЯ ТА ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИФРАКЦІЇ ФРАУНГОФЕРА ВІД ВПОРЯДКОВАНИХ І НЕВПОРЯДКОВАНИХ НЕПРОЗОРИХ МІКРОСТРУКТУР ДЛЯ ОСВІТНЬОЇ ПРАКТИКИ	28
Деордіца Т., Вороніна М., Гладушина Р., Епіфанова О., Козьменко О., Толмачов В.	46
ЧОТИРИ ТЕХНІКИ ПРОМПТИНГУ ДЛЯ АНАЛІТИЧНОЇ РОБОТИ З НАВЧАЛЬНО МЕТОДИЧНИМИ МАТЕРІАЛАМИ	46
Лінник Г., Морачковська І.	56
ВИКОРИСТАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ГЕЙМІФІКАЦІЇ ПРИ ВИКЛАДАННІ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ У ЗВО	56
Носенко Ю.	64
КЛАСИФІКАЦІЯ ЗАСОБІВ ПІДТРИМУВАННЯ МОБІЛЬНОГО НАВЧАННЯ В ЗАКЛАДАХ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ	64
Працьовитий М., Правіцка Н., Ратушняк С.	71
ДИЛАТАЦІЇ ПЛОЩИНИ У ШКМ ТА ТЕОРІЇ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ПЛОЩИНИ ДЛЯ МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ	71
Чкана Я.	86
КОГНІТИВНО-ВЕРИФІКАЦІЙНИЙ ПІДХІД ДО ТРАНСФОРМАЦІЇ ДОМАШНІХ ЗАВДАНЬ З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ В УМОВАХ ВИКОРИСТАННЯ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ	86
Шамоня В., Беспалий В.	94
ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ЗАВАДИ ТА НАДІЙНІСТЬ ПЕРЕДАВАННЯ ДАНИХ У НАВЧАЛЬНИХ ЕКСПЕРИМЕНТАХ ІЗ SDR	94
АЛФАВІТНИЙ ПОКАЖЧИК	101

CONTENTS

Bazurin V., Bazurina S., Kolesnyk S., Kolesnyk V., Dulenko N.	6
SOFTWARE IMPLEMENTATION OF ALGORITHMS FOR CALCULATING PEARSON, SPEARMAN AND KENDALL CORRELATIONS IN C#	6
Bodnaruk S., Rybchynskiy N.	18
ALGORITHMIC SUPPORT FOR REVERSE GENERATION OF TRIGONOMETRIC TASKS USING OBJECT- ORIENTED MODELING	18
Voronkin O., Lushchin S.	28
EXPERIMENTAL VISUALIZATION AND NUMERICAL SIMULATION OF FRAUNHOFER DIFFRACTION FROM ORDERED AND DISORDERED OPAQUE MICROSTRUCTURES FOR EDUCATION PRACTICE	28
Dieorditsa T., Voronina M., Hladushyna R., Yepifanova O., Kozmenko O., Tolmachov V.	46
FOUR PROMPTING TECHNIQUES FOR ANALYTICAL WORK WITH TEACHING AND LEARNING RESOURCES	46
Linnik H., Morachkovska I.	56
USE OF GAMIFICATION ELEMENTS IN TEACHING MATHEMATICAL ANALYSIS AT HIGHER EDUCATION INSTITUTIONS	56
Nosenko Yu.	64
CLASSIFICATION OF MOBILE LEARNING SUPPORT TOOLS IN GENERAL SECONDARY EDUCATION	64
Pratsiovytyi M., Pravitska N., Ratushniak S.	71
PLANE DILATIONS IN THE SCHOOL MATHEMATICS COURSE AND THE THEORY OF GEOMETRIC TRANSFORMATIONS FOR FUTURE MATHEMATICS TEACHERS	71
Chkana Ya.	86
A COGNITIVE-VERIFICATION APPROACH TO TRANSFORMING HOMEWORK IN MATHEMATICAL ANALYSIS IN THE CONTEXT OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE USE	86
Shamonia V., Bepalyi V.	94
ELECTROMAGNETIC INTERFERENCE AND DATA TRANSMISSION RELIABILITY IN SDR-BASED EDUCATIONAL EXPERIMENTS	94

ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ НА МОВІ C# АЛГОРИТМІВ ОБЧИСЛЕННЯ КОРЕЛЯЦІЇ ПІРСОНА, СПІРМЕНА І КЕНДАЛЛА

Віталій БАЗУРІН ✉

Державний торговельно-економічний університет, Україна
vbazurin@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-6614-4889>

Софія БАЗУРІНА

Глухівський міський центр позашкільної освіти, Україна
sofia.bazurina@gmail.com
<https://orcid.org/0009-0004-5168-9992>

Світлана КОЛЕСНИК

Відокремлений структурний підрозділ
«Глухівський агротехнічний фаховий коледж СНАУ», Україна
ksa081967@gmail.com
<https://orcid.org/0009-0005-9510-288X>

В'ячеслав КОЛЕСНИК

Відокремлений структурний підрозділ
«Глухівський агротехнічний фаховий коледж СНАУ», Україна
kvv.slava21@gmail.com
<https://orcid.org/0009-0006-0245-2811>

Ніна ДУЛЕНКО

Відокремлений структурний підрозділ
«Глухівський агротехнічний фаховий коледж СНАУ», Україна
ninadulenko03@gmail.com
<https://orcid.org/0009-0006-5151-9808>

SOFTWARE IMPLEMENTATION OF ALGORITHMS FOR CALCULATING PEARSON, SPEARMAN AND KENDALL CORRELATIONS IN C#

Vitalii BAZURIN ✉

State University of Trade and Economics, Ukraine
vbazurin@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-6614-4889>

Sofia BAZURINA

Hlukhiv City Center for Extracurricular Education, Ukraine
sofia.bazurina@gmail.com
<https://orcid.org/0009-0004-5168-9992>

Svitlana KOLESNYK

Separate structural unit
"Hlukhiv Agrotechnical Vocational College of SNAU", Ukraine
ksa081967@gmail.com
<https://orcid.org/0009-0005-9510-288X>

Vyacheslav KOLESNYK

Separate structural unit
"Hlukhiv Agrotechnical Vocational College of SNAU", Ukraine
kvv.slava21@gmail.com
<https://orcid.org/0009-0006-0245-2811>

Nina DULENKO

Separate structural unit
"Hlukhiv Agrotechnical Vocational College of SNAU", Ukraine
ninadulenko03@gmail.com
<https://orcid.org/0009-0006-5151-9808>

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. У наукових дослідженнях з соціології, освіти, фізики, хімії та інших наук використовуються методи кореляційного аналізу. За допомогою коефіцієнтів кореляції визначають існування зв'язку між двома і більше вибірками даних.

Використання коефіцієнтів кореляції надає можливість досліднику з'ясувати, чи існує зв'язок між двома наборами даних, а також характер цього зв'язку: сильний чи слабкий, прямий чи обернений. Завдяки методам кореляції дослідник має дієвий інструмент для підтвердження чи спростування гіпотези.

Важливе місце у застосуванні кореляційного аналізу на практиці відіграють засоби інформаційних технологій. Ці засоби надають можливість зменшити час обробки результатів наукових досліджень у кілька разів. Програмні засоби, які використовуються під час кореляційного аналізу, варіюються у широкому спектрі: до них належать і електронні таблиці MS Excel, і математичний пакет STATISTICA, і мова програмування R. Спільним недоліком зазначених засобів ІТ є те, що дослідник, який їх використовує, повинен мати певний рівень математичної підготовки (STATISTICA), або навички програмування (мова R), або виконувати введення даних вручну (MS Excel). Виникає суперечність між можливостями ІКТ для кореляційного аналізу і тим, як вони застосовуються зараз.

Матеріали і методи. Під час виконання дослідження ми використали такі методи: аналіз і синтез наукової літератури з кореляційного аналізу, теорії алгоритміє, об'єктно-

ABSTRACT

Formulation of the problem. In scientific research in sociology, education, physics, chemistry and other sciences, methods of correlation analysis are used. Correlation coefficients are used to determine the existence of a relationship between two or more data samples. The use of correlation coefficients allows the researcher to determine whether there is a relationship between two data sets and the nature of that relationship: strong or weak, direct or inverse. Thanks to correlation methods, the researcher has an effective tool for confirming or disproving a hypothesis. Information technology tools play an important role in the application of correlation analysis in practice. These tools enable reducing the processing time for scientific research results by several times. Software tools used in correlation analysis vary widely, from MS Excel spreadsheets to STATISTICA and the R programming language. A common drawback of these IT tools is that the researcher using them must have a certain level of mathematical training (STATISTICA), programming skills (R), or manual data entry skills (MS Excel). There is a discrepancy between the capabilities of ICT for correlation analysis and how they are currently used.

Materials and methods. During the research, we used the following methods: analysis and synthesis of scientific literature on correlation analysis, algorithm theory, object-oriented programming, and the foundations of scientific research; comparative analysis of algorithms for calculating Pearson, Spearman, and Kendall correlation coefficients; algorithmic

орієнтованого програмування, основ наукових досліджень; порівняльний аналіз алгоритмів розрахунку коефіцієнтів кореляції Пірсона, Спірмена, Кендалла; алгоритмічний метод для побудови алгоритмів розрахунку кореляції; методи об'єктно-орієнтованого програмування для програмної розробки алгоритмів; методи кореляції; тестування обчислювальної складності алгоритмів; тестування точності; тестування виняткових ситуацій (пропуск значень, різні розміри вибірок), тестування стабільності.

Результати. Реалізовано мовою C# алгоритми обчислення кореляції Пірсона, Спірмена і Кендалла. Під час розробки використано компонентно-орієнтований і об'єктно-орієнтований підходи у програмуванні. Алгоритми обчислення кореляції Пірсона, Спірмена і Кендалла представлені мовою C# у вигляді програмної бібліотеки у форматі DLL, яка складається з 5 класів. Розроблені класи і методи для обчислення кореляції Пірсона, Спірмена і Кендалла. Об'єктивною новизною є програмна реалізація алгоритму обчислення кореляції Кендалла для платформи .NET. Для розрахунку вказаних коефіцієнтів кореляції розроблено додаток CorrAnalyzer, до якого підключено створену програмну бібліотеку. Розроблені бібліотеку і додаток доцільно використовувати у педагогічних, психологічних, соціологічних дослідженнях для визначення зв'язку між двома вибірками.

Висновки. Методи кореляції застосовуються для визначення зв'язку між двома вибірками. Найбільш часто використовуються кореляції Пірсона, Спірмена і Кендалла. Коефіцієнти кореляції Пірсона, Спірмена і Кендалла відрізняються за принципом і алгоритмом розрахунку. На основі результатів тестування точності, обчислювальної складності і винятків визначено придатність розроблених методів для застосування під час обробки результатів експерименту. Для того, щоб створювана програмна бібліотека являла собою потужний інструмент для визначення зв'язку між вибірками, в ній реалізовані всі три методи кореляції. Бібліотеку для розрахунку кореляції реалізовано у вигляді компонента (файл DLL), який інтегровано у додаток CorrAnalyzer, написаний мовою C#. Додаток CorrAnalyzer призначений для визначення зв'язку між невеликими вибірками (до 1000 значень).

У перспективі розроблену програмну бібліотеку доцільно доповнити класами для розрахунку кореляції Метьюза і конкордації.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: кореляція; алгоритм; Пірсон; Спірмен; Кендалл; компонентно-орієнтований підхід; програмна бібліотека.

method for constructing correlation calculation algorithms; object-oriented programming methods for software development of developed algorithms; correlation methods; computational complexity testing; accuracy testing; exception testing (handling missing values, different sample sizes); numerical stability testing.

Results. Algorithms for calculating Pearson, Spearman, and Kendall correlations have been implemented in the C# language. During development, component-oriented and object-oriented approaches in programming were used. Algorithms for calculating Pearson, Spearman, and Kendall correlations are presented in the C# language in the form of a program library in DLL format, which consists of 5 classes. Classes and methods for calculating Pearson, Spearman, and Kendall correlations have been developed. The objective novelty is the software implementation of the algorithm for calculating Kendall correlations for the .NET platform. To calculate the specified correlation coefficients, the CorrAnalyzer application has been developed, which connects to the program library created. The developed library and application are recommended for use in pedagogical, psychological, and sociological research to determine the relationship between the two samples.

Conclusions. Correlation methods are used to determine the relationship between two samples. The most commonly used are Pearson, Spearman, and Kendall correlations. The Pearson, Spearman, and Kendall correlation coefficients differ in their principles and calculation algorithms. Based on testing results for accuracy, computational complexity, and exceptions, the suitability of the developed methods for processing experimental results was determined. To make the software library a powerful tool for determining relationships between samples, all three of the above correlation methods are implemented in it. The library for calculating correlation is implemented as a component (DLL) that is integrated into the CorrAnalyzer application, written in C#. The CorrAnalyzer application is designed to determine the relationship between small samples (up to 1000 values).

In the future, it is advisable to supplement the developed software library with classes for calculating the Matthews correlation and concordance.

KEYWORDS: correlation; algorithm; Pearson; Spearman; Kendall; component-oriented approach; software library.

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Bazurin V., Bazurina S., Kolesnyk S., Kolesnyk V., Dulenko N. Software implementation of algorithms for calculating Pearson, Spearman and Kendall correlations in C#. *Фізико-математична освіта*, 2026. Том 41. № 2. С. 6-17. <https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i2-01>.

FOR CITATION: Bazurin, V., Bazurina, S., Kolesnyk, S., Kolesnyk, V., & Dulenko, N. (2026). Software implementation of algorithms for calculating Pearson, Spearman and Kendall correlations in C#. *Physical and Mathematical Education*, 41(2), 6-17. <https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i2-01>.

INTRODUCTION

Formulation of the problem. Scientific research in sociology, education, physics, chemistry, and other sciences uses methods of correlation analysis. Correlation coefficients are used to determine the existence of a relationship between two or more data samples. Using correlation coefficients allows the researcher to find out whether there is a relationship between two data sets, as well as the nature of this relationship: strong or weak, direct or inverse. Thanks to correlation methods, the researcher has an effective tool for confirming or disproving a hypothesis. Information technology tools play an important role in the application of correlation analysis in practice.

Existing solutions do not provide the necessary functionality (Math.NET Numerics, ML.NET do not have tools for calculating Kendall correlation), data entry automation (STATISTICA, MathCAD, MATLAB, Accord.NET), and are designed for outdated .NET platforms (Math.NET Numerics, Accord.NET). The proposed solution is aimed at developing a library and integrating it into a software tool that will fully automate data processing and calculate Pearson, Spearman, and Kendall correlations for given samples.

These tools make it possible to reduce the processing time of scientific research results by several times. Software tools used in correlation analysis vary widely, from MS Excel spreadsheets to STATISTICA and the R programming language. A common drawback of these IT tools is that the researcher using them must have a certain level of mathematical training (STATISTICA), programming skills (R), or manual data entry skills (MS Excel). There is a discrepancy between the capabilities of ICT for correlation analysis and how they are currently used.

Existing software tools provide limited functionality (for example, the Math.NET Numerics library provides Pearson and Spearman correlation calculations, and does not calculate Kendall correlation, MS Excel, MatCAD and MATLAB software tools do not provide the necessary automation of correlation calculations), some libraries do not contain modern implementations (the latest version of Math.NET Numerics was released in April 2022, the latest version of Accord.NET was released in November 2017). Implementing correlation calculation algorithms as a library is advisable, since support for existing libraries (Math.NET

Numerics, Pandas) may be discontinued by developers. In addition, when developing a software tool that integrates many functions (including automation of data processing, report generation, etc.), it is advisable to use your own library so that the functionality of the software tool can be expanded in the future by expanding the functionality of the library (for example, calculating Matthews correlation, concordance, etc.). Therefore, the software implementation of Pearson, Spearman, and Kendall correlation algorithms, designed for the modern version of .NET, is relevant.

Analysis of actual research. Scientific sources on the research problem, in our opinion, can be conditionally divided into the following categories: 1) studies that reveal the mathematical foundations of correlation analysis; 2) studies devoted to the use of software tools and programming languages in correlation analysis. Let us analyze the scientific studies of the first group. N.J. Gogtay and U.M. Thatte, in their article (Gogtay & Thatte, 2017), reveal the basic principles of correlation analysis. They determine that correlation can be positive (direct), negative (inverse), or absent. By the strength of the connection, correlation can be strong, weak, or zero. Therefore, correlation can be, for example, strong positive or strong negative, etc. Researchers indicate that during correlation analysis, the following factors must be taken into account: 1) correlation analysis is inappropriate to use when the input data for calculations are the values of the same variable in the same or different time intervals; 2) it is advisable to plot a scatter plot during correlation analysis; 3) an outlier (a value that rarely occurs in the samples) can significantly affect the correlation coefficient; 4) correlation analysis should not be performed if there is a nonlinear relationship between different variables; 5) if the input data contain two separate groups of values that are significantly different, the calculations may indicate a correlation (when in fact there may not be one); 6) the sample size should be calculated beforehand. If the samples are small, the calculations may show the existence of a direct relationship (when in fact this is not the case); 7) if one sample consists of data that are included in the second sample, the calculations may show the existence of a direct relationship. M. Franzece and A. Iuliano (2018), in their study, examine such types of correlation as covariance, Pearson, Spearman, and Kendall correlation coefficients. In their article, the researchers show confidence intervals and graphs of all types of distributions, examples of applying different methods to small samples, and for data analysis, including the use of the R software tool to calculate correlation. S. Senthilnathan (2019), in his article, notes that in software tools that perform correlation analysis, two coefficients are mainly used: Pearson and Spearman. S. Senthilnathan, in the article, shows the principle of interpreting correlation coefficients in scientific research in the social sciences. P. Schober and T. R. Vetter (2020), in their article, demonstrate examples of the application of Pearson correlation and Spearman correlation in medical research.

Cicuttin et al. (2022) in their article demonstrate the results of developing their own correlation method, which is similar to the Pearson correlation coefficient, and also prove the validity of the developed method as a result of studying impulses.

T. J. Cleophas and A. H. Zwinderman (2018) offer their own approach to determining the correlation between two continuous variables, which consists of applying Bayesian linear correlation analysis. R.J. Janse, T. Hoekstra, J. K. J. Jager, C. Zoccali, G. Tripepi, F.W. Dekker, and M. van Diepen, in their article, reveal the main limitations and hidden moments of correlation analysis (Janse et al., 2021). The article considers issues related to correlation: variance and its interpretation, linearity of correlation, range of observations for correlation, non-causality of correlation, agreement between methods, intraclass coefficient, 95% agreement limit, and Bland-Altman plot. J. Chen, G. Wang, and G. B. Giannakis, in their article, propose a new approach in multi-species canonical correlation analysis with graph regularization, as well as a dual approach adapted for cases when the number of data pairs is less than the size of the data vector (Chen et al., 2019). Let us analyze the second group's research in more detail. D. Makowski, M. S. Ben-Shachar, I. Patil, and D. Lüdecke in their article give examples of calculating the following types of correlation: linear (Pearson), rank (Spearman, Kendall), two-weighted average, distance correlation, percent curvature correlation, Shepherd's Pi correlation, point-biserial and biserial correlation, polychoric, tetrachoric, partial, multilevel (Makowski et al., 2020). The article also provides the results of calculating the correlation using a program in the R language. But there is no assessment of their characteristics, such as time complexity and accuracy. The developed application is posted on the resource (<https://github.com/easystats/correlation>). Disadvantages: the created application is not intended for the .NET platform.

S. Yadav (2018) indicates that two correlation coefficients are most often used: Pearson and Spearman, and also demonstrates graphs depicting different types of relationships. The article also gives examples of calculating correlation coefficients using the SPSS software.

J.-Ch. Yoo and T.H. Han (2009) in their article demonstrate a fast algorithm for calculating the normalized cross-correlation without using the multiplication operation, as well as the results of testing the algorithm on a sample of 100,000 test signals. A correlation calculation algorithm for signal processing is developed.

W.N. Arifin (2018) developed a calculator for calculating sample sizes used in statistical analysis. Using this calculator, scientists can calculate sample size for Cronbach's alpha, intraclass correlation, kappa, and Pearson's correlation coefficient. B. Winter (2019), in his book, provides examples of calculating Pearson's correlation using R. R. Vallat (2018), in his article, describes a Python package called Pingouin, which is designed to automate statistical calculations, including the calculation of repeated measures correlation coefficients and robust correlations. This package is built on the basis of the Pandas library. In our opinion, this package has only one drawback: it is built on the basis of third-party software, support for which may be discontinued by the developers.

The article (Rayhan, 2025) compares the Pearson, Spearman, and Kendall correlation methods based on the following criteria: type (parametric or nonparametric), data type (for which the method is appropriate), and limitations. The article also provides heat maps for the specified methods, generated using the KARL Lab Correlation Tool (developed by the article's authors). This software tool is written in Python using Streamlit, Pandas, NumPy, SciPy, Matplotlib, and Seaborn libraries. Disadvantages: the developed software tool is not focused on the .NET platform, uses third-party software, and is also intended for use in the field of Data Science and business analytics.

O. Derevyanchuk (2025), in his article, describes the software implementation of the Pearson correlation algorithm in Python in the form of the software tool `egres_ed_25`. The article also presents the results of research into the relationship between the study of different disciplines by university students. The developed software tool uses the third-party library

Matplotlib. The article does not disclose the accuracy and time complexity of the developed algorithm that calculates the Pearson correlation.

Let's analyze the software tools with which you can calculate correlation. These include STATISTICA, SPSS, Microsoft Excel, the Math.NET Numerics library, and the built-in Correlation method of the C# language.

Using STATISTICA and SPSS, you can calculate Pearson and Spearman correlation coefficients. However, these software tools are paid.

Microsoft Excel provides the ability to calculate the Pearson correlation between two samples using the built-in Correl function. Other correlation coefficients are not calculated.

The software tool FinnCorr (Dakılır, 2024) is a powerful tool for financial analysis and includes a function for calculating Pearson correlation. Disadvantage: limited functionality (only calculates Pearson correlation).

The CorrelEstimator library (Mith0304, 2015) provides the ability to calculate Kendall correlation and is designed for use on the .NET platform. Disadvantages: unstable operation, limited functionality.

The Math.NET Numerics library is a powerful tool for performing algebraic and statistical calculations: probability distribution, pseudorandom number generation, matrix operations, complex numbers, linear regression, curve fitting, financial statistics, Monte Carlo method, Fourier transform, and others (Ruegg, 2025).

The Math.NET Numerics library contains functions for calculating Pearson and Spearman correlations, but does not have a function for calculating Kendall correlations. However, in cases where the data distribution is not normal, there are a large number of identical values, and when the sample size is small, it is advisable to use Kendall correlations. The library we have developed provides the calculation of Kendall correlations.

The time complexity of the algorithm for calculating the Pearson correlation is $O(n)$. In this library, the method for determining the Pearson correlation is optimized so that the number of passes through the data array is minimal (usually 2 passes). Therefore, the Correlation.Pearson() method of the Math.NET Numerics library will be efficient for large samples. The algorithm makes two passes through the data arrays: 1. The first one is to find the average values. 2. The second one is to calculate the numerator and denominator. Each pass has a complexity of $O(n)$. All other operations (division, root, multiplication) are $O(1)$. So, the total complexity: $T(n)=O(n)+O(n)+O(1)=O(n)$.

For Spearman correlation, the complexity of the algorithm is calculated as follows: 1) ranking: sorting the array $O(n \log n)$; 2) calculating averages and sums: one pass $O(n)$. Total complexity: $T(n)=O(n \log n)+O(n)=O(n \log n)$.

The Accord.NET library is designed for machine learning, but it includes functions for calculating Pearson, Spearman, and Kendall correlations. However, the latest version of Accord.NET was released in 2017, so new versions of the .NET Framework require a new implementation of this library.

Pearson correlation calculation (in Accord.NET library Pearson correlation realized as a structure PearsonCorrelation in Accord.Math.Distances namespace): 1) first, the average values of the arrays are calculated; 2) then one pass is made for the numerator and denominator. Algorithm complexity: Calculating the averages: one pass through the array – $O(n)$, calculating the sums of deviations: one more pass – $O(n)$. Final operations: constant – $O(1)$. Total algorithm complexity: $T(n)=O(n)$.

Accord.net does not have built-in methods for calculating Spearman and Kendall correlations. For these, you must use ranking functions and write the method for calculating the correlation manually (Measures Methods, 2017).

Results of testing built-in methods for calculating correlation of the Math.NET Numerics and Accord.NET libraries. To process 2 samples of 1000000 elements, the Math.NET Numeric library spends 161483 clock cycles, the Accord.NET library – 787329 clock cycles. The result of the Correlation.Pearson(x, y) method of the Math.NET Numeric library is a number, the Pearson correlation coefficient, in the Measures. Using the Correlation(xy) method of the Accord.NET library, the result is a correlation matrix. This matrix should be further processed using other functions to obtain the Pearson correlation coefficient. From the above data, we can conclude that the Math.NET Numerics library is more suitable for use in the application, since it works faster and using the Accord.NET library requires writing additional code. For the Correlation.Spearman(x, y) method of the Math.NET Numeric library, the test results are as follows: for samples of 1000000 values each, the processing time was 6792208 clock cycles.

API development testing. To use the methods of the Math.NET Numerics library, it is enough to connect the library and call the corresponding method, so according to the "API development" criterion, this library can be assessed at a high level. To use the methods of the Accord.NET library, you need to connect the library itself and write additional code to get the result (for the Pearson or Spearman criterion) in the form of a number, not a matrix. Therefore, according to the "API development" criterion, the Accord.NET library is assessed at an average level.

The analyzed articles contain a description of correlation methods (Pearson, Spearman and Kendall), a comparative analysis of Pearson, Spearman and Kendall correlation methods, a description of the software implementation of correlation methods, a description of the developed applications and their application to determine the accuracy of some correlation methods (mainly Pearson and those developed by the authors), The comparative analysis of Pearson, Spearman and Kendall correlation methods is relative, the authors do not evaluate the developed algorithms using clear metrics (time complexity of the algorithms and their accuracy). The applications developed by the authors are mostly written in Python and use third-party libraries. That is why we consider it advisable to develop our own library for calculating correlation, which will calculate the Pearson, Spearman, and Kendall correlation coefficients.

The purpose of the article is to reveal the features of the software implementation of algorithms for calculating Pearson, Spearman, and Kendall correlations in the C# language as a separate component.

METHODS OF THE RESEARCH

During the research, we used the following methods:

– analysis and synthesis of scientific literature on correlation analysis, algorithm theory, object-oriented programming, and the foundations of scientific research;

- comparative analysis of algorithms for calculating Pearson, Spearman, and Kendall correlation coefficients;
- algorithmic method for constructing correlation calculation algorithms;
- object-oriented programming methods for software development of developed algorithms;
- correlation methods;
 - computational complexity testing;
 - accuracy testing;
 - exception testing (handling missing values, different sample sizes);
 - numerical stability testing;

The developed algorithms are implemented in C# for the .NET 4.7 platform in the Microsoft Visual Studio 2022 environment.

Testing the computational complexity of all three developed methods was carried out using built-in methods of C Sharp. During testing, we determined the time complexity of the algorithm for arrays of 1000, 2000, 4000 and 8000 random numbers. During testing, clock cycles were counted. Testing was carried out 5 times, and the average number of cycles required to process the array was determined.

Methodology for testing the accuracy of calculations performed by the algorithm:

1. Calculation of Pearson correlation using MS Excel for arrays of 100, 500 and 1000 numbers.
2. Calculation of Pearson correlation performed by the developed method.
3. Comparison of the obtained values using MS Excel and the developed method.

Testing the accuracy of the Spearman correlation algorithm was carried out for the following sample sizes: 100, 500, and 1000 random numbers. The result was then compared with calculations performed in MS Excel.

RESULTS OF RESEARCH

Let us first consider the algorithm for calculating the Pearson correlation coefficient. It is described in (Cleophas & Zwinderman, 2018) and is calculated using the formula:

$$r_{xy} = \frac{n \cdot \sum_i (x_i y_i) - (\sum_i x_i) \cdot (\sum_i y_i)}{\sqrt{(n \cdot \sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2) \cdot (n \cdot \sum_i y_i^2 - (\sum_i y_i)^2)}} \quad (1)$$

Where x_i, y_i are the values of both samples.

Fig. 1 shows the algorithm for calculating Pearson's correlation. The main features of the algorithm:

- 1) to calculate the Pearson's correlation coefficient, a table of values is required (i.e., a two-dimensional array);
- 2) the first two columns of the array are filled with values, and the other three are calculated;
- 3) before entering data into the array, they are checked for gaps and symbolic values. If these bugs are present, the input of the values of x and y is skipped;
- 4) as new values of x_i, y_i are added to the array, their sums, sums of squares, sums of products are calculated;
- 5) the data contained in the cells of the array are fixed;
- 6) after the data entry is completed, the Pearson correlation is calculated;
- 7) it is possible to combine the calculation of the Pearson correlation and the class constructor.

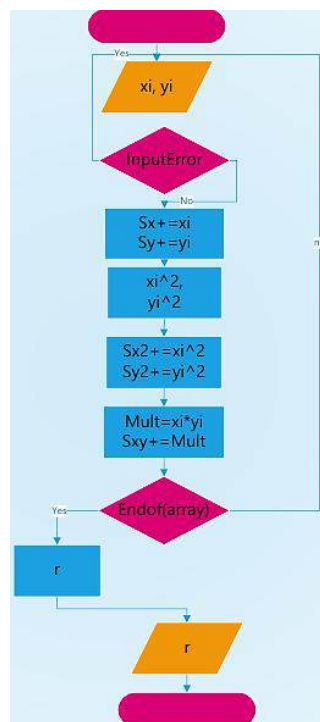


Fig.1. Algorithm for calculating Pearson's correlation

Source: author's development

The *PearsArray* class has been developed to calculate Pearson's correlation. Class members: *RecordsArray* fields (two-dimensional array of values), *N* (number of rows), *Sx*, *Sy* (sums of samples x and y, respectively), *Sx2* and *Sy2* (sums of squares of samples x and y), *Sxy* (sum of products xy), *r* (correlation coefficient). Class methods: *PearsArray* (constructor), *SetArray* (setting array values), *Correlation* (returns correlation coefficient), *Conclusion* (determines and returns conclusion).

Let us consider the results of testing the developed method for calculating Fig Pearson correlation. The results of the time-complexity test are shown in Fig. 2.

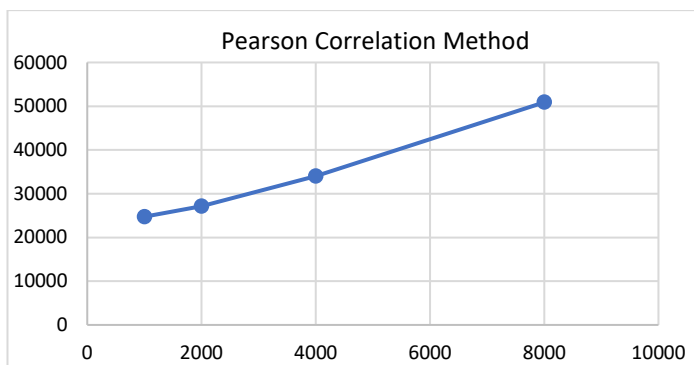


Fig.2. Results of testing the time complexity of the algorithm for calculating the Pearson correlation method

Source: author's research

The figure shows that the time complexity of the algorithm *O* is directly proportional to the sample size (*O(n)*).

Results of testing the accuracy of the developed method for calculating Pearson correlation. The algorithm for calculating Pearson's correlation was tested for accuracy on samples of 100, 500, and 1000, and the results were compared with those calculated in MS Excel.

Table 1. Results of testing the accuracy of calculations using the Pearson correlation method

Sample size	Calculation results of the method	Calculation results in MS Excel	Absolute error
100	-0.118945878	-0.118945878	0
500	0.009701465	0.009701465	0
1000	-0.024792625	-0.024792625	0

Source: author's research

Therefore, the developed algorithm achieves a calculation accuracy of up to 0.000000001.

Testing for missing values and unequal samples was performed during the creation of the *PearsArray* class instance. If a missing value was detected in one of the samples or if the samples had different lengths, an exception was thrown in the *PearsArray* class constructor and the creation of the class instance was stopped.

Let's consider the algorithm for calculating Spearman's correlation and its software implementation.

The sequence of calculating Spearman's correlation is disclosed in (Gogtay & Thatte, 2017). Spearman's correlation is calculated by the formula:

$$r_s = 1 - \frac{6 \cdot \sum (R(x)_i - R(y)_i)^2}{n \cdot (n^2 - 1)} \tag{2}$$

A feature of Spearman's correlation is that it calculates the ranks of the sample x and the sample y separately. Features of the algorithm:

- 1) the data for calculations can be presented in the form of a two-dimensional array;
- 2) the first two columns of the array are filled with the initial data, the other three columns of the array contain the calculated data;
- 3) to determine the rank of each value from the samples x and y, it is necessary to make a pass through the array;
- 4) after calculating the ranks, another pass through the array should be made to calculate the square of the difference in ranks, the sum of the ranks, and the sum of the squares of the ranks;
- 5) in the next step, the correlation coefficient is calculated;
- 6) each row of the table should be implemented as an instance of the *SpRecord* class; the correctness of the entered data is checked in the class constructor; if the entered non-numeric value or the value is omitted, an exception is generated, and the algorithm proceeds to the next step;
- 7) It is advisable to organize the entire data table as an array of *SpRecord* class objects.

To calculate Spearman's correlation, the *SpRecord* class (related sample values) and the *SpArray* class (contains all data for calculations) were created.

The *SpRecord* class has the fields *valX*, *valY* (related sample values), *RankX* and *RankY* (respectively, the ranks of the x and y values), *dif2* (the square of the difference in ranks of x and y). Class methods: constructor.

The *SpArray* class is an array of *SpRecord* records and has the following fields: *SpRecord* (array of records), *N* (number of records), *Sx* and *Sy* (sum of ranks of the first and second samples), *Sdif* (sum of square differences), *r* (correlation coefficient), *concl* (conclusion). *SpRecord* class methods: *SpArray* (constructor), *AddRecord* (add record to array), *Correlation* (returns correlation coefficient), *Conclusion* (returns conclusion about the existence of relationships).

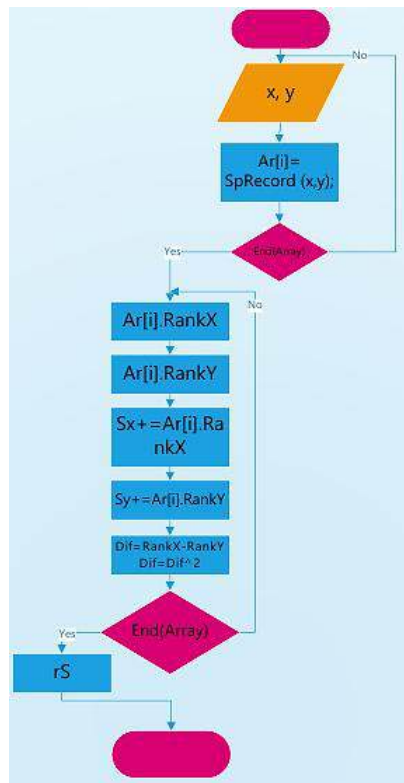


Fig.3. Algorithm for calculating Spearman's correlation
 Source: author's development

The results of testing the time complexity of the algorithm for calculating the Spearman correlation are shown in Fig. 4. The figure shows that the algorithm's time complexity is proportional to the square of the sample size ($O(n^2)$). The graph of the O function has the form of a parabola.

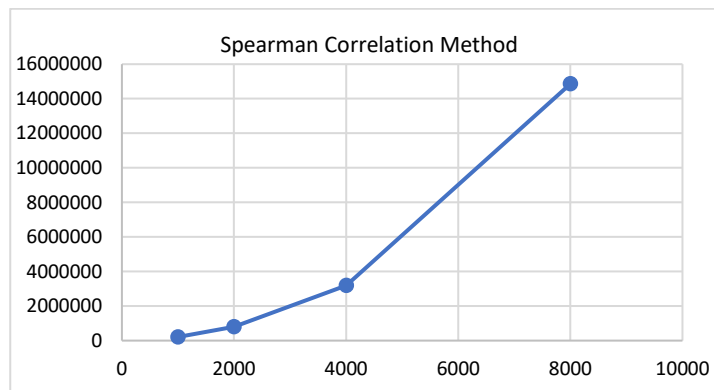


Fig. 4. Results of testing the computational complexity of the algorithm for calculating the Spearman correlation
 Source: author's development

The results of testing the accuracy of the developed algorithm for determining the Spearman correlation coefficient are given in Table 2.

Table 2. Results of testing the accuracy of calculations using the Spearman correlation method

Sample size	Calculation results of the method	Calculation results in MS Excel	Absolute error
100	0.058919892	0,058919892	0
500	0.05650007	0.05650007	0
1000	0.04927515	0.04927515	0

Source: author's research

Therefore, the developed algorithm provides calculation accuracy up to 0.00000001.

Testing for missing values and unequal samples was performed during the creation of the *SpArray* class instance. If a missing value was detected in one of the samples or if the samples had different lengths, an exception was thrown in the *SpArray* class constructor, and the creation of the class instance was stopped.

Let's consider the algorithm for calculating the Kendall correlation and its software implementation.

The sequence for calculating the Kendall correlation is given in (Franzece & Iuliano, 2018). The Kendall correlation coefficient is calculated using the formula:

$$\tau = \frac{\sum P - \sum Q}{n \cdot (n-1) / 2} \tag{3}$$

Features of the algorithm for calculating the Kendall correlation coefficient:

- 1) a table of values is used for calculations, in which the elements of the samples x and y are linked to each other; each pair of such linked values is combined into an instance of the *KendRecord* class; valid values are checked in the *KendRecord* class constructor; in case of incorrect data, an exception is generated, in this case an instance of the *KendRecord* class is not created;
- 2) the table has 6 columns: the values of the samples x and y are entered in the first 2 columns, the next two columns are the ranks of the values x and y, respectively, the last two columns are the number of coincidences and inversions, respectively;
- 3) during calculations, the rows of the table are sorted in ascending order (by the rank of the sample x, and the linked values of the sample y must be moved);
- 4) subsequently, for each value of the sample y, the number of coincidences and inversions is calculated.

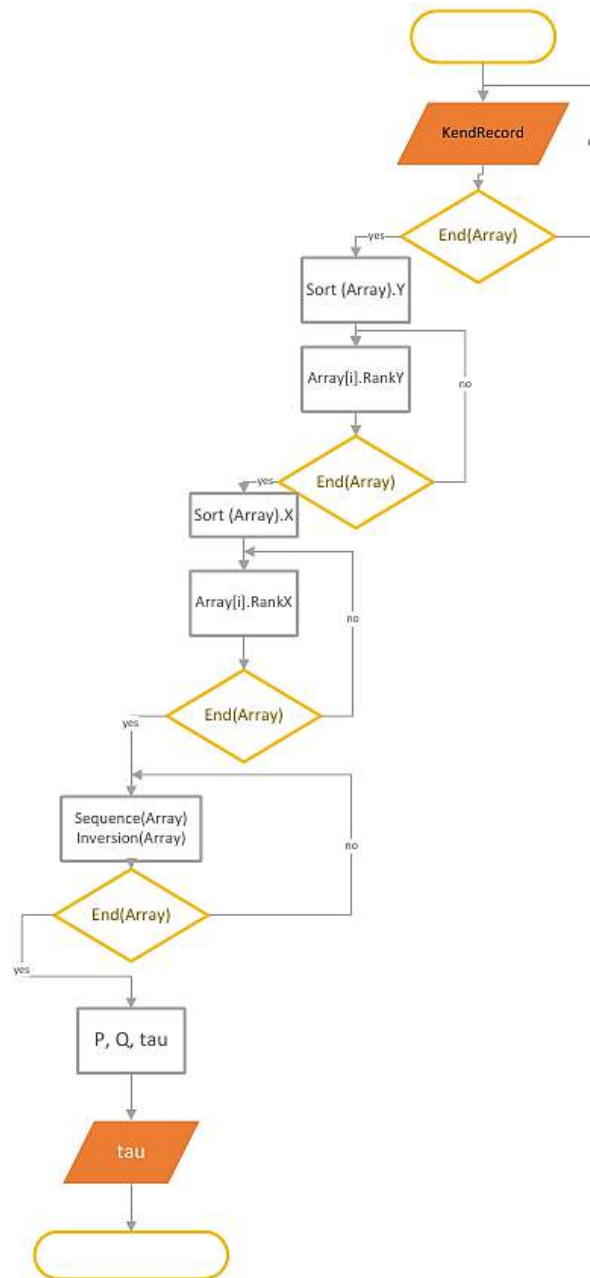


Fig. 5. Schematic of the algorithm for calculating the Kendall correlation coefficient

Source: author's development

To calculate the Kendall correlation, the *KendRecord* and *KendArray* classes were developed. *KendRecord* is a linked pair of values from both samples and has the following fields: *valX* and *valY* (linked values of both samples), *RankX* and *RankY* (ranks of x and y values), *P* (number of matches), *Q* (number of inversions). Class methods: *KendRecord* (constructor).

The *KendArray* class is an array of records (objects of the *KendRecord* class) and contains the following fields: records (array of values), *N* (number of elements in each sample), *P* (sum of matches), *Q* (sum of inversions), *tau* (Kendall correlation coefficient), *concl* (conclusion). Class methods: *KendRecord* (constructor), *AddRecord* (adds a record to the array), *Correlation* (returns the correlation coefficient), *Conclusion* (returns the conclusion).

The results of testing the time complexity of the algorithm for calculating the Kendall correlation method are shown in Fig. 6. The figure shows that the time complexity of the algorithm is proportional to the square of the sample size ($O(n^2)$). The graph of the *O* function has the form of a parabola.

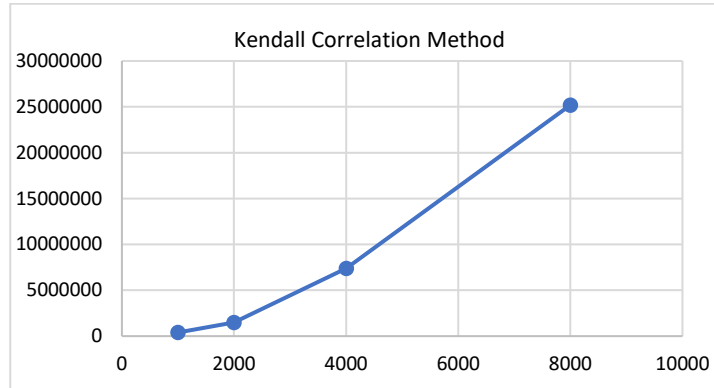


Fig. 6. Results of testing the computational complexity of the algorithm for calculating the Kendall correlation method
Source: author's development

The results of testing the accuracy of the developed algorithm for determining the Spearman correlation coefficient are given in Table 3.

Table 3. Results of testing the accuracy of calculations using the Kendall correlation method

Sample size	Calculation results of the method	Calculation results in MS Excel	Absolute error
100	-0.655959	-0.655959	0
500	0.591991984	0.591991984	0
1000	0.391101101	0.391101101	0

Source: author's research

Therefore, the developed algorithm provides calculation accuracy up to 0.00000001.

Testing for missing values and unequal samples was performed during the creation of the *KendArray* class instance. If a missing value was detected in one of the samples or if the samples had different lengths, an exception was thrown in the *KendArray* class constructor, and the creation of the class instance was stopped.

All developed classes are arranged in one component (module) and implemented in C#. The class diagram of the *CSCorrelation* library is shown in Fig. 7. The members of each class are described earlier.

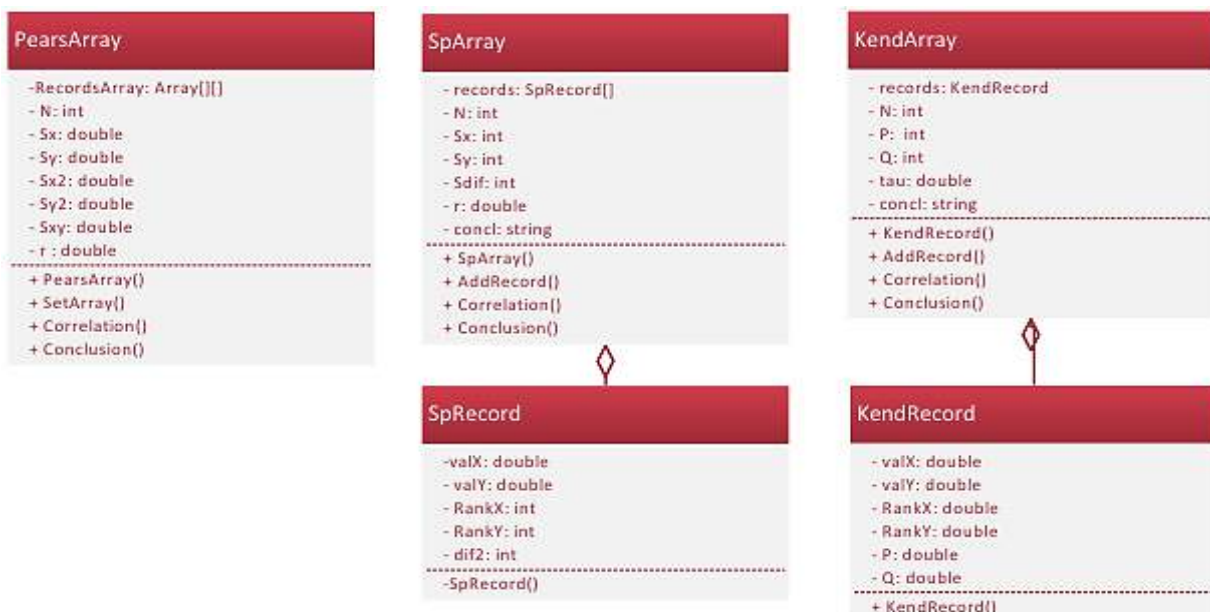


Fig. 7. Contents of the CSCorrelation library
Source: author's development

The developed DLL library is connected to the CorrAnalyzer application (Fig. 8).

The application for calculating correlations consists of a main form and a secondary form. The main form displays a calculation table. This table has a different appearance for Pearson correlation (Fig. 8), Spearman correlation (Fig. 9), and Kendall correlation (Fig. 10).

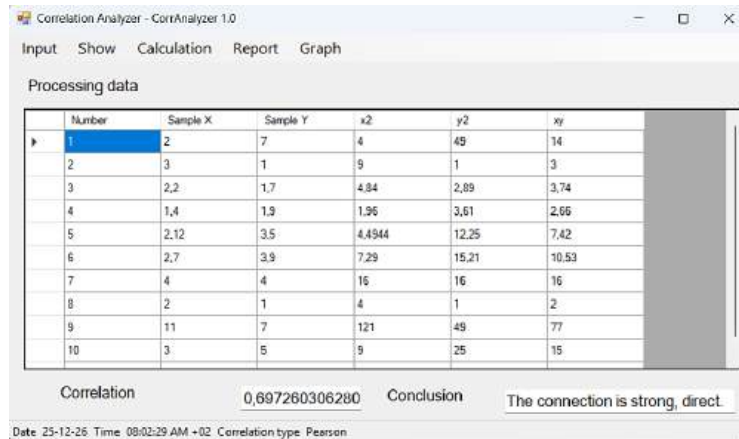


Fig. 8. CorrAnalyzer application (calculation of Pearson correlation)
Source: author's development

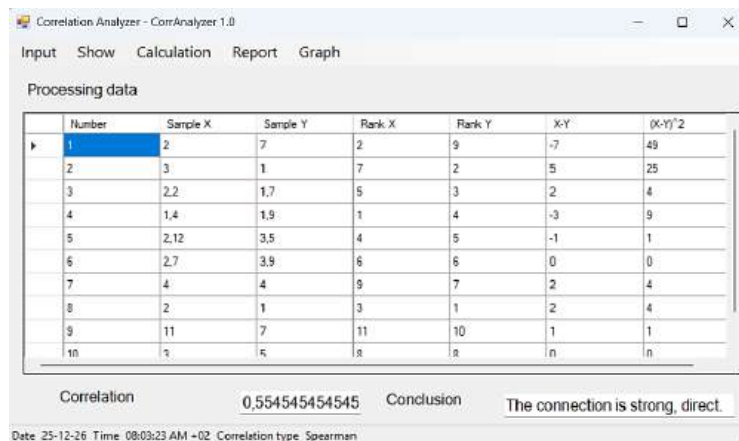


Fig. 9. CorrAnalyzer application (calculation of Spearman correlation)
Source: author's development

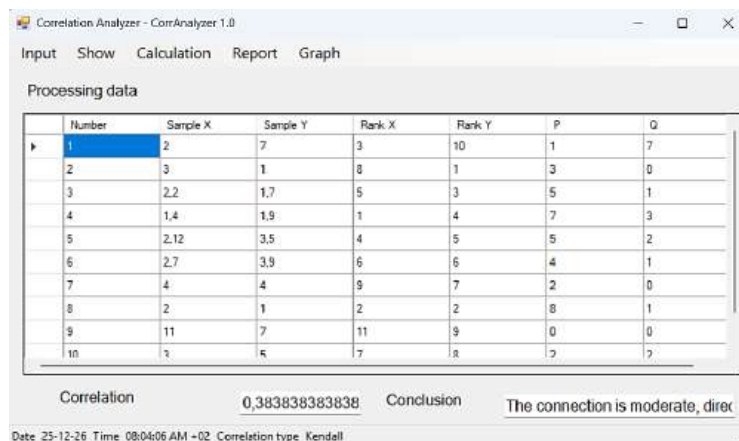


Fig. 10. CorrAnalyzer application (Kendall correlation calculation)
Source: author's development

The additional form displays a frequency graph to determine the type of distribution of sample values: normal, exponential, etc. (Fig. 11).

To check the accuracy of calculations in MS Excel, we created a random data set consisting of 2 samples of 11 values each. The calculated values of Pearson's, Spearman's, and Kendall's correlations are 0.695, 0.556, and 0.384, respectively. For the CorrAnalyzer application, the calculated value of Pearson's correlation for this sample is 0.697, Spearman's correlation is 0.554, and Kendall's correlation is 0.383. Thus, the accuracy of the calculations of this application is up to the third decimal place. It follows that the created application is advisable to use for relatively small samples (up to 1000 values).

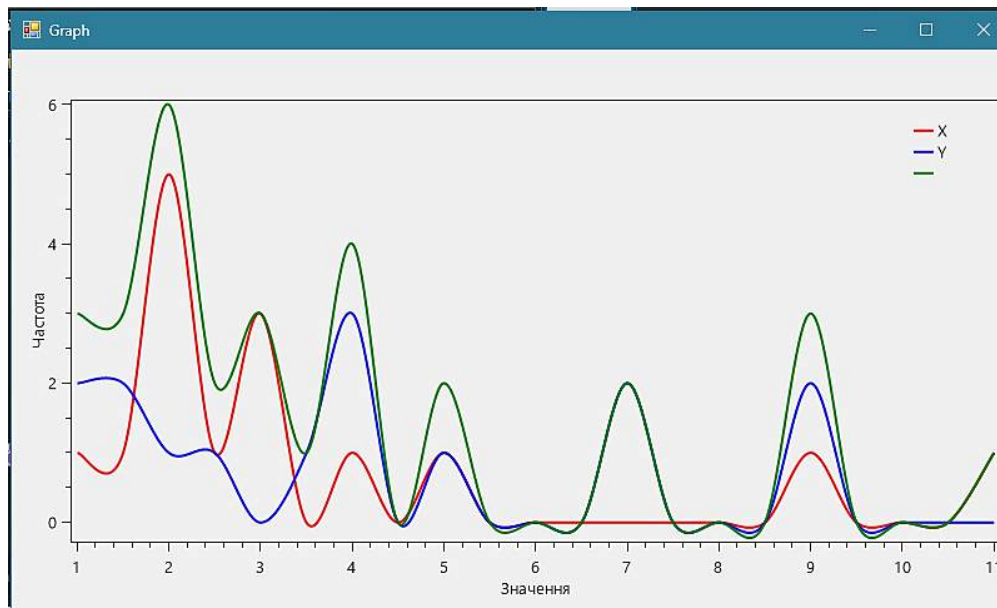


Fig. 11. CorrAnalyzer application (frequency graph)

Source: author's development

DISCUSSION

When developing a software tool for the .NET platform that calculates correlation, you can use the free .NET Numerics and Accord libraries. But their functionality is limited, so when developing such a program, you need to write your own methods, for example, to calculate the Kendall correlation. The approach proposed in the article involves developing your own library for calculating Pearson, Spearman, and Kendall correlations and integrating them into one library. The proposed approach is more rational from the perspective of further development of software tools, as it enables the addition of methods for calculating concordance, Matthews correlation, etc., thereby significantly expanding the functionality of the developed library.

CONCLUSIONS AND PERSPECTIVES FOR FURTHER RESEARCH

Correlation methods are used to determine the relationship between two samples. The most commonly used are Pearson, Spearman, and Kendall correlations. The Pearson, Spearman, and Kendall correlation coefficients differ in their principles and calculation algorithms. To make the software library a powerful tool for determining relationships between samples, all three of the above correlation methods are implemented in it. The library for calculating correlation is implemented as a component (DLL) that is integrated into the CorrAnalyzer application, written in C#. The CorrAnalyzer application is designed to determine the relationship between small samples (up to 1000 values).

During the research, software implementations of algorithms for calculating Pearson, Spearman, and Kendall correlations were developed as a library for the .NET platform. The authors' contribution is a software implementation of the algorithm for calculating Kendall correlations for the .NET platform, since the most common .NET libraries, Numerics and Accord, do not have such a function. The developed methods for calculating Pearson, Spearman, and Kendall correlations were tested for time complexity, accuracy, and failure rates (due to missing values and unequal sample sizes). All methods demonstrated sufficient accuracy (the calculations were checked in MS Excel). The time complexity of the developed methods for calculating Pearson and Spearman correlations is of the same order as the corresponding methods of the .NET Numerics and Accord libraries. The time complexity of the algorithm for calculating the Kendall correlation is $O(n^2)$, since it uses ranking. Research limitations: testing of computational accuracy was limited to sample sizes of 100, 500, and 1000 random numbers, since the library under development is intended for processing the results of pedagogical research, and the number of values is limited to these sizes.

In the future, it is advisable to test the developed algorithm for calculating the Kendall correlation on samples of sizes 2000, 4000, and larger, using more random numbers.

In the future, it is advisable to supplement the developed software library with classes for calculating the Matthews correlation coefficient and the concordance.

CONFLICT OF INTEREST

The authors declare no conflict of interest.

FUNDING SOURCES

This research did not receive any specific grant from funding agencies in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

DATA AVAILABILITY

This study did not generate or utilize any separate datasets.

USE OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE (AI) TOOLS

No AI-assisted technologies were used in the preparation of this manuscript.

AUTHOR CONTRIBUTIONS (CRediT)

Vitalii Bazurin – Conceptualization; Methodology; Project administration; Writing – original draft; Writing – review & editing.

Sofia Bazurina – Data curation; Formal analysis; Visualization; Writing – review & editing.

Svitlana Kolesnyk – Validation; Supervision; Writing – review & editing.

Vyacheslav Kolesnyk – Data curation; Formal analysis; Visualization.

Nina Dulenko – Data Curation; Formal analysis.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Accord.NET Framework (n.d.). *Measures Correlation Method (Double[,])*. URL: http://accord-framework.net/docs/html/M_Accord_Statistics_Measures_Correlation.htm
2. Arifin, W. N. (2018). A Web-based Sample Size Calculator for Reliability Studies. *Education in medicine journal*, 10(3), 67–76. <https://doi.org/10.21315/eimj2018.10.3.8>
3. Chen, J., Wang, G., & Giannakis, G. B. (2019). Graph multiview canonical correlation analysis. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 67(11), 2826–2838. <https://doi.org/10.1109/TSP.2019.2910475>
4. Cicuttin, A., Morales, I. R., Crespo, M. L., Carrato, S., García, L. G., Molina, R. S., Valinoti, B., & Folla Kamdem, J. (2022). A Simplified Correlation Index for Fast Real-Time Pulse Shape Recognition. *Sensors*, 22(20), 7697. <https://doi.org/10.3390/s22207697>
5. Cleophas, T. J., & Zwinderman, A. H. (2018). Bayesian Pearson correlation analysis. In *Modern Bayesian statistics in clinical research* (pp. 111–118). Cham: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-92747-3_11
6. Daklır, D. (2024). *FinnCorr: Financial Data Correlation Analysis Engine* (Computer software). GitHub. URL: <https://github.com/zelosleone/FinnCorr>
7. Derevyanchuk, O. (2025). Methods of correlation and regression of educational data in the systematic analysis of the quality of training of teachers of vocational education. *Pedagogical Academy: scientific notes*, 23. <https://doi.org/10.5281/zenodo.18004752>
8. Franzece, M., & Iuliano, A. (2018). Correlation analysis. In *Encyclopedia of bioinformatics and computational biology: ABC of bioinformatics* (Vol. 1, pp. 706–721). Elsevier. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-809633-8.20358-0>
9. Gogtay, N. J., & Thatte, U. M. (2017). Principles of correlation analysis. *Journal of the Association of Physicians of India*, 65(3), 78–81. https://www.kem.edu/wp-content/uploads/2012/06/9-Principles_of_correlation-1.pdf
10. Janse, R. J., Hoekstra, T., Jager, K. J., Zoccali, C., Tripepi, G., Dekker, F. W., & Van Diepen, M. (2021). Conducting correlation analysis: important limitations and pitfalls. *Clinical Kidney Journal*, 14(11), 2332–2337. <https://doi.org/10.1093/ckj/sfab085>
11. Makowski, D., Ben-Shachar, M. S., Patil, I., & Lüdtke, D. (2020). Methods and algorithms for correlation analysis in R. *Journal of Open Source Software*, 5(51), 2306. <https://doi.org/10.21105/joss.02306>
12. MathNet.Numerics (n.d.). Correlation – Math.NET Numerics Documentation. URL: <https://numerics.mathdotnet.com/api/MathNet.Numerics.Statistics/Correlation.htm#Pearson>
13. MathNet.Numerics (n.d.). Correlation – Math.NET Numerics Documentation. URL: <https://numerics.mathdotnet.com/api/MathNet.Numerics.Statistics/Correlation.htm#Spearman>
14. Measures Methods. (2017). URL: http://accord-framework.net/docs/html/Methods_T_Accord_Statistics_Measures.htm
15. Mith0304. (2015). *CorrelEstimator* (Computer software). GitHub. URL: <https://github.com/Mith0304/CorrelEstimator>
16. Rayhan, M., Al, A., Md Nurnabe Sagor, Pranto Das, Md. Sabbir Ahmed, Abu Sadat, Abdul Hafiz Tamim, Emon, S., Asad, M. A., & Alam, M. K. (2025). *An Open-Source Framework for Advanced Correlation Analysis: The KARL Lab Correlation Tool (Pro Edition)*. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.17088075>
17. Ruegg, C. (2025). Math.NET Numerics (Source code). GitHub. URL: <https://github.com/mathnet/mathnet-numeric>
18. Schober, P., & Vetter, T. R. (2020). Correlation analysis in medical research. *Anesthesia & Analgesia*, 130(2), 332. <https://doi.org/10.1213/ANE.0000000000004578>
19. Senthilnathan, S. (2019). Usefulness of correlation analysis. Available at SSRN 3416918. <http://doi.org/10.2139/ssrn.3416918>
20. StatisticFormula.Correlation (2025). URL: <https://learn.microsoft.com/en-us/dotnet/api/system.web.ui.datavisualization.charting.statisticformula.correlation?view=netframework-4.8.1>
21. Vallat, R. (2018). Pingouin: statistics in Python. *J. Open Source Softw.*, 3(31), 1026. <http://doi.org/10.21105/joss.01026>
22. Winter, B. (2019). *Statistics for linguists: An introduction using R*. Routledge. URL: <https://www.jeffreyheinz.net/classes/20F/materials/readings/Bodo2020-FrontMatter.pdf>
23. Yadav, S. (2018). Correlation analysis in biological studies. *Journal of the Practice of cardiovascular sciences*, 4(2), 116–121. https://doi.org/10.4103/jpcs.ipcs_31_18
24. Yoo, J.-Ch., & Han, T.H. (2009). Fast Normalized Cross-Correlation. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 28(6), 819–843. <https://doi.org/10.1007/s00034-009-9130-7>

| Received: 05.01.2026 | Accepted: 15.03.2026 | Published: 30.04.2026 |



This work is licensed under Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.

АЛГОРИТМІЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ РЕВЕРСИВНОЇ ГЕНЕРАЦІЇ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ЗАВДАНЬ ЗАСОБАМИ ОБ'ЄКТНО-ОРІЄНТОВАНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Світлана БОДНАРУК

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, Україна
s.bodnaruk@chnu.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0002-4979-7669>

Назарій РИБЧИНСЬКИЙ ✉

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, Україна
nazarii.rybchynskiy@gmail.com
<https://orcid.org/0009-0001-4617-2823>

ALGORITHMIC SUPPORT FOR REVERSE GENERATION OF TRIGONOMETRIC TASKS USING OBJECT-ORIENTED MODELING

Svitlana BODNARUK

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Ukraine
s.bodnaruk@chnu.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0002-4979-7669>

Nazarii RYBCHYNSKYI ✉

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Ukraine
nazarii.rybchynskiy@gmail.com
<https://orcid.org/0009-0001-4617-2823>

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. У статті представлено результати розробки та практичного впровадження алгоритмічної системи для автоматизації підготовки дидактичних матеріалів з розділу тригонометрії. Основна ідея дослідження ґрунтується на переході від традиційного механічного підбору задач до моделі реверсивного конструювання рівнянь. Запропонований підхід передбачає, що програмний алгоритм генерує математичну умову, виходячи із заздалегідь визначеної відповіді (коренів), що дає можливість вчителю миттєво створювати велику кількість варіативних завдань однакового рівня складності для забезпечення індивідуальної траєкторії навчання.

Матеріали і методи. Технічна реалізація системи виконана мовою програмування Python із залученням бібліотеки символічних обчислень SymPy. У роботі детально описано розроблену архітектуру класів, що охоплюють різні типи тригонометричних рівнянь: від базових до однорідних та таких, що розв'язуються методом введення нової змінної. Важливою технічною характеристикою алгоритму є автоматична верифікація області допустимих значень та фільтрація сторонніх коренів ще на етапі синтезу умови задачі, що гарантує абсолютну математичну точність кожного генерованого завдання.

Результати. Описана система є ефективною не лише для оперативного контролю знань, а й для організації самостійної роботи учнів у дистанційному та змішаному форматах. Наявність автоматично згенерованих покрокових розв'язків дозволяє здобувачам освіти самостійно опанувати алгоритми розв'язання складних завдань, мінімізуючи прогалини у знаннях без постійного втручання педагога. Ефективність запропонованої методики перевірено під час практичної апробації на базі ліцею у Чернівецькій області. Аналіз результатів експерименту показав, що систематичне використання персоналізованих завдань дозволило учням краще засвоїти методи тригонометричних перетворень, а середній бал успішності в експериментальних групах зріс на 15–20%.

Висновки. Авторами встановлено, що впровадження таких цифрових інструментів суттєво розвантажує вчителя, звільняючи час для творчої методичної діяльності та індивідуальної роботи з учнями. У висновках визначено перспективи масштабування реверсивного алгоритму для інших тем курсу алгебри та математичного аналізу.

ABSTRACT

Formulation of the problem. The article presents the results of developing and implementing an algorithmic system to automate the preparation of trigonometry didactic materials. The core research idea is based on a transition from the traditional mechanical selection of problems to a model of reverse equation construction. The proposed approach implies that the software algorithm generates a mathematical condition based on a predetermined set of answers (roots), enabling the teacher to instantly create a vast number of variable tasks of the same complexity level to ensure a personalized learning trajectory.

Materials and methods. The system's technical implementation is implemented in Python using the SymPy symbolic computation library. The paper details the developed class architecture, covering various types of trigonometric equations, from basic ones to homogeneous equations and those solved by the variable-substitution method. A crucial technical characteristic of the algorithm is the automatic verification of the domain of permissible values and the filtering of extraneous roots during problem condition synthesis, which guarantees the absolute mathematical accuracy of each generated task.

Results. The described system is effective not only for rapid knowledge assessment but also for organizing students' independent work in distance and blended learning formats. The availability of automatically generated step-by-step solutions allows students to independently master algorithms for solving complex problems, minimizing knowledge gaps without constant teacher intervention. The effectiveness of the proposed methodology was verified during practical testing at a lyceum in the Chernivtsi region. Analysis of the experimental results showed that the systematic use of personalized tasks enabled students to better master trigonometric transformations, and the average academic performance in the experimental groups increased by 15–20%.

Conclusions. The authors demonstrate that implementing these digital tools significantly reduces teachers' workload, freeing up time for creative pedagogical activities and individualized work with students. The conclusions identify opportunities to scale the reverse algorithm to other topics in the algebra and mathematical analysis course.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: тригонометричні рівняння; автоматизація навчання; реверсивне конструювання задач; мова Python; бібліотека SymPy; диференційоване навчання.

KEYWORDS: trigonometric equations; educational automation; reverse problem construction; Python language; SymPy library; differentiated instruction.

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Боднарук С., Рибчинський Н. Алгоритмічне забезпечення реверсивної генерації тригонометричних завдань засобами об'єктно-орієнтованого моделювання. *Фізико-математична освіта*, 2026. Том 41. № 2. С. 18-27. <https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i2-02>.

FOR CITATION: Bodnaruk, S., & Rybchynskiy, N. (2026). Algorithmic support for reverse generation of trigonometric tasks using object-oriented modeling. *Physical and Mathematical Education*, 41(2), 18-27. <https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i2-02>.

ВСТУП

Постановка проблеми. Сучасний освітній простір України переживає етап активної цифрової трансформації, що вимагає від вчителя математики нових підходів до організації навчального процесу. В умовах змішаного навчання особливо гостро постають питання забезпечення об'єктивного контролю знань та дотримання академічної доброчесності. Традиційні методи підготовки дидактичних матеріалів, що базуються на статичних підручниках, поступово втрачають свою ефективність через широку доступність цифрових збірок готового домашнього завдання, які нівелиють ідею самостійної роботи учня. Водночас ручне створення вчителем унікальних варіантів контрольних робіт для кожного учня є трудомістким процесом, що часто унеможливує реалізацію індивідуального підходу в умовах великої кількості учнів.

Актуальність теми дослідження зумовлена нагальною потребою розв'язання протиріччя між необхідністю забезпечення кожного учня унікальним навчальним завданням та обмеженими часовими ресурсами педагога. Використання сучасних засобів математичного моделювання та генеративних моделей дозволяє автоматизувати рутинні процеси створення завдань. Застосування мови програмування Python у поєднанні з бібліотеками символічних обчислень відкриває можливості для створення адаптивних завдань, що відповідають вимогам шкільної програми та враховують індивідуальні особливості учнів. Таким чином, розробка методики використання автоматизованих систем генерації завдань є своєчасною відповіддю на виклики сучасної освіти.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в тому, що вперше обґрунтовано доцільність поєднання бібліотеки символічних обчислень SymPy з методичними вимогами української школи для автоматизації контролю знань. Удосконалені підходи до диференціації навчання через впровадження реверсивних алгоритмів генерації, які гарантують отримання методично доцільних («красивих») відповідей.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У низці сучасних досліджень обґрунтовується значний потенціал великих мовних моделей та інтелектуальних систем у генерації математичного контенту для STEM-дисциплін, що сприяє підвищенню якості освітньої діагностики та автоматизації створення навчальних матеріалів (Chan et al., 2025). Зокрема, розробка багатоагентних фреймворків для генерування математичних задач демонструє ефективність автоматизованого підходу, який забезпечує більш точне формулювання завдань і сприяє раціональному розподілу когнітивного навантаження між учасниками освітнього процесу (Karbasi et al., 2025).

Важливе місце в цьому контексті посідають системи символічних обчислень. Використання інструментів на базі бібліотеки SymPy для аналізу та автоматизованого розв'язування рівнянь розширює можливості дослідження структури математичних об'єктів і поглиблює концептуальне розуміння навчального матеріалу (Ali & Khusro, 2024). Окремі дослідження також засвідчують ефективність застосування чат-ботів, зокрема на основі ChatGPT, у процесі вивчення тригонометричних тотожностей у старшій школі, що позитивно впливає на розвиток логічного мислення та навчальної мотивації здобувачів освіти (Fitri et al., 2025).

Аналіз наведених праць дає підстави стверджувати, що регіональні акценти досліджень мають певні відмінності: зокрема, азіатські науковці активніше зосереджуються на використанні ChatGPT у шкільному курсі математики, тоді як європейські та американські автори частіше досліджують потенціал SymPy у викладанні вищої математики (математичного аналізу, лінійної алгебри) та в розробці відкритих систем автоматичного розв'язування рівнянь. Водночас застосування символічних обчислювальних систем у шкільному курсі математики наразі залишається недостатньо представленим у наукових публікаціях.

У цьому контексті особливої уваги потребує питання інтеграції зазначених підходів у систему навчання математики старшої школи України.

Організація навчання математики в сучасній українській старшій школі ґрунтується на принципах профільної диференціації, що передбачають чітке розмежування змісту освіти на рівні стандарту, на рівні профільного та поглибленого. Такий підхід зумовлює суттєві відмінності в методичних системах навчання, обсязі навчального часу та вимогах до математичної компетентності учнів. Змістова лінія «Тригонометричні рівняння та нерівності» є індикатором цієї диференціації, оскільки демонструє перехід від суто прикладного сприйняття математичних моделей (рівень стандарту) до глибокого теоретичного аналізу та дослідницької діяльності (профільний та поглиблений рівні). Аналіз нормативних документів, зокрема навчальних програм, затверджених Міністерством освіти і науки України (2017a,b,c), дозволяє виявити специфіку викладання цієї теми для кожної категорії здобувачів освіти.

Аналіз навчально-методичного забезпечення дозволяє простежити трансформацію програмних вимог у конкретні дидактичні матеріали. Розглянуті підручники демонструють різні авторські концепції викладання теми, що впливають на структуру завдань для розроблюваної інформаційної системи.

Підручник А. Г. Мерзляка («Алгебра і початки аналізу. 10 клас. Профільний рівень»), що також використовується для поглибленого вивчення, характеризується високим рівнем теоретичного узагальнення та математичної строгості (Мерзляк та ін., 2018).

У підручнику Є. П. Неліна (профільний рівень) реалізовано методику, спрямовану на формування узагальнених способів діяльності (Нелін, 2018).

Підручник О. С. Істера (профільний рівень) фокусується на чіткій алгоритмізації навчального процесу (Істер & Ергіна, 2018).

Проведений аналіз навчально-методичної літератури та нормативних документів дозволяє виявити ключову проблему: вчитель математики працює в умовах значної варіативності вимог та підходів. Якщо для рівня стандарту пріоритетним є засвоєння алгоритмів розв'язування найпростіших рівнянь (шаблонна діяльність), то профільний та поглиблений рівні вимагають від учнів гнучкості мислення, вміння комбінувати різні методи (заміна, розкладання, введення допоміжного кута), проводити дослідження ОДЗ та працювати з параметрами.

Сучасний ринок освітнього ПЗ пропонує інструменти, орієнтовані переважно на автоматичне розв'язування задач учнем, а не на генерацію дидактичних матеріалів учителем (Волянська & Лемішко, 2017). Системи символічної математики, такі як WolframAlpha, забезпечують високу точність та покрокові розв'язки, проте функціонують як інтелектуальні калькулятори, що вимагають ручного введення кожного рівняння. Мобільні застосунки типу Photomath базуються на технології OCR і є інструментами «споживання» готового контенту, що створює ризики для академічної доброчесності та не вирішує проблему створення нових завдань.

Інтерактивні середовища, зокрема GeoGebra, мають потужний потенціал для візуалізації та динамічного дослідження тригонометричних функцій, проте не пристосовані для швидкої підготовки статичних роздаткових матеріалів. Спеціалізовані сервіси на кшталт Symbolab пропонують режими тренування з автоматичною перевіркою відповідей, однак вони працюють у форматі онлайн-тренажерів для індивідуальних користувачів. Жоден із зазначених засобів не дозволяє вчителю оперативно згенерувати пакет унікальних варіантів контрольних робіт у форматі PDF із повною деталізацією розв'язків, що й обґрунтовує доцільність розробки запропонованої системи.

Отже, аналіз нормативної бази та методичного забезпечення підтвердив суттєву розбіжність у вимогах до вивчення тригонометрії залежно від профілю навчання. Складність опанування теми зумовлена високим рівнем абстракції та ризиком виникнення типових помилок (втрата коренів, поява сторонніх розв'язків), що потребує глибокої диференціації завдань.

Попри наявність потужних обчислювальних систем, на ринку освітнього ПЗ спостерігається дефіцит інструментів для автоматизованого створення варіативного контенту. Суперечність між необхідністю індивідуалізації навчання та обмеженістю існуючих сервісів (що працюють переважно як калькулятори) обґрунтовує актуальність розробки спеціалізованої системи для генерації тригонометричних рівнянь із гнучким налаштуванням складності.

Мета дослідження: Головною метою роботи є теоретичне обґрунтування, розробка та експериментальна перевірка методики використання автоматизованої системи генерації тригонометричних рівнянь для підвищення ефективності навчання алгебри в закладах загальної середньої освіти.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Дослідження базується на комплексному поєднанні аналізу науково-педагогічної літератури та методів алгоритмічного моделювання. Програмна реалізація системи здійснювалася засобами об'єктно-орієнтованого програмування (мова Python, бібліотека SymPy). Експериментальна перевірка запропонованої методики проводилася у першому семестрі 2025–2026 навчального року на базі ліцею у Чернівецькій області. У дослідженні взяли участь 29 учнів 10-го класу (з них 15 осіб увійшли до експериментальної групи та 14 – до контрольної). Для перевірки знань та вмінь було розроблено комплекс діагностичних завдань, що включав: розв'язання базових тригонометричних рівнянь, рівнянь, що зводяться до квадратних, та однорідних рівнянь першого і другого порядків. Ефективність підходу оцінювалася за результатами порівняльного аналізу академічної успішності контрольної та експериментальної груп. Основними критеріями оцінювання визначено якість засвоєння алгоритмів розв'язування тригонометричних рівнянь, а також рівень самостійності учнів, продемонстрований під час опанування матеріалу за допомогою автоматизованих покрокових розв'язків.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1 Методичні особливості та алгоритмізація розв'язання

Архітектура програмного продукту охоплює генерацію ключових класів тригонометричних рівнянь, реалізацію алгоритмів розв'язання яких враховує методичні особливості їх розв'язання та типові помилки учнів (Боднарук та ін., 2024). Зупинимось у статті коротко на деяких типах рівнянь.

1.1 Рівняння, що зводяться до квадратних

У межах реалізованої моделі метод заміни змінної розглядається не лише як засіб зведення тригонометричного рівняння до алгебраїчного, а й як інструмент превентивного подолання типових помилок учнів. Алгоритм генерації та розв'язання враховує такі ключові аспекти:

- Автоматизація тотожних перетворень: програма базується на системі тригонометричних тотожностей, що дозволяють звести всі функції до єдиного аргументу. Це мінімізує помилки, пов'язані з неправильним застосуванням формул (зокрема, формул подвійного кута $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$, які часто плутають учні).

- Контроль області значень: програмний модуль здійснює обов'язкову верифікацію коренів отриманого квадратного рівняння. Якщо $t = \sin x$, $t = \cos x$, система автоматично акцентує увагу на умові $|t| \leq 1$. У покрокових розв'язках, що генеруються ботом, цей етап виділено як критичний, що привчає учнів до відсіювання сторонніх коренів на етапі повернення до початкової змінної.

- Коректність фінального етапу: оскільки помилки на етапі розв'язування найпростіших рівнянь $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$ є найбільш масовими, у програмі реалізовано чітку логіку виведення загальних формул коренів з урахуванням періодичності.

Така структура алгоритму дозволяє змістити фокус із механічних обчислень на концептуальне розуміння методу заміни, де кожен крок програми слугує методичною підказкою для усунення прогалин у знаннях.

1.2 Однорідні тригонометричні рівняння

Однорідними тригонометричними рівняннями n -го степеня називають рівняння, у яких усі доданки мають однаковий сумарний степінь щодо $\sin x$ і $\cos x$:

$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + \dots + a_n \cos^n x = 0,$$

де a_0, a_1, \dots, a_n – дійсні числа, не всі рівні нулю.

Специфічна структура цього рівняння дозволяє застосовувати універсальний алгоритм зведення до алгебраїчного рівняння шляхом ділення на $\cos^n x$ або $\sin^n x$ (залежно від структури), отримуючи рівняння щодо $\operatorname{tg} x$ або $\operatorname{ctg} x$.

Методичні аспекти та автоматизація контролю. При розробці алгоритму генерації та розв'язання особливу увагу приділено декільком методичним викликам:

- Проблема надмірної перевірки ОДЗ. У шкільній практиці учні часто виконують формальну перевірку умови $\cos x \neq 0$, не розуміючи її логічного підґрунтя. Програмний модуль акцентує увагу на тому, що для однорідних рівнянь точки, де $\cos x = 0$, априорі не є коренями (оскільки $\cos x$ та $\sin x$ не набувають нульових значень одночасно). Це дозволяє алгоритму пропонувати лаконічні розв'язки без зайвих обчислень, розвиваючи в учнів критичне ставлення до стандартних процедур.
- Типові помилки розпізнавання. Найчастіше учні плутають однорідні рівняння з неоднорідними (наприклад, $a \sin x + b \cos x = c$ при $c \neq 0$). Програма генерує систему контрприкладів, що допомагає візуалізувати відмінність між однорідною структурою та рівняннями, які потребують використання формул подвійного аргументу або введення допоміжного кута.
- Помилки вибору степеня при діленні. У рівняннях вищих степенів учні нерідко ділять на $\cos x$ замість на $\cos^n x$. Програмна реалізація покрокового розв'язку автоматично виділяє максимальний степінь як дільник, супроводжуючи це коментарем: "Максимальний степінь у рівнянні – n , тому ділимо на $\cos^n x$ ". Для автоматизації процесу в системі реалізовано клас, який на етапі синтезу умови перевіряє сумарний степінь кожного монома. Якщо умова однорідності порушена (наприклад, через наявність вільного члена), алгоритм пропонує зведення до однорідного рівняння через основну тригонометричну тотожність ($1 = \sin^2 x + \cos^2 x$), що є важливою методичною вправою для учнів профільних класів.

1.3 Рівняння, що містять обернені тригонометричні функції

Робота з рівняннями, що містять обернені тригонометричні функції, передбачає відмову від шаблонних перетворень на користь глибокого аналізу областей визначення та значень. Оскільки композиції прямих та обернених функцій (наприклад, $\sin(\arcsin x) = x$) є тотожними лише на обмежених проміжках, програмний алгоритм включає обов'язковий етап верифікації умов існування розв'язків, що мінімізує ризик появи сторонніх коренів у підсумкових дидактичних матеріалах. На відміну від учнів, які часто ігнорують обмеження $|x| \leq 1$, бібліотека SymPy дозволяє автоматизувати перевірку цих умов ще на етапі ініціалізації об'єктів класу рівнянь.

2 Розробка програмного забезпечення для генерації завдань

2.1 Обґрунтування вибору технологій розробки

Вибір інструментарію для реалізації програмної системи генерації тригонометричних рівнянь базувався на аналізі специфіки предметної області, яка вимагає високої точності математичних обчислень, гнучкості у маніпулюванні символічними виразами та можливості динамічного розширення функціоналу. Ключовим завданням розробки є створення адаптивної системи, здатної не лише генерувати математичні задачі, але й формувати покрокові пояснення їх розв'язання, що накладає суттєві обмеження на вибір мови програмування та бібліотек.

Основною мовою реалізації було обрано Python. Даний вибір обумовлений наявністю розвиненої екосистеми для наукових та математичних обчислень, а також високим рівнем абстракції, що дозволяє зосередитися на алгоритмічній складовій задачі, мінімізуючи витрати часу на вирішення низькорівневих питань управління пам'яттю. Інтерпретована природа мови та динамічна типізація забезпечують можливість швидкого прототипування складних алгоритмів генерації, що є критично важливим на етапі підбору параметрів для отримання «табличних» значень тригонометричних функцій. Крім того, синтаксична лаконічність Python сприяє підтримці чистоти коду та його читабельності, що є важливим фактором при реалізації складної бізнес-логіки математичних перетворень.

Центральним компонентом системи є бібліотека символічної математики SymPy. Використання чисельних методів (наприклад, бібліотеки NumPy) у даному контексті є недоцільним, оскільки освітні задачі вимагають точних аналітичних розв'язків (у вигляді дробів, коренів, чисел π), а не їх наближених десяткових значень. SymPy дозволяє оперувати математичними об'єктами у символічному вигляді, що дає змогу виконувати такі операції, як спрощення виразів, розкриття дужок, знаходження коренів рівнянь у загальному вигляді та перевірку тотожностей. Саме завдяки функціоналу цієї бібліотеки реалізовано механізми перевірки властивостей коефіцієнтів (цілочисельність, ірраціональність), що необхідно для фільтрації некоректних або занадто складних для шкільного курсу варіантів рівнянь.

Архітектура програмного комплексу побудована на принципах об'єктно-орієнтованого програмування (ООП), що дозволило створити модульну та розширювану систему. Було використано патерн проектування «Шаблонний метод» (Template Method), реалізований через базовий абстрактний клас. Цей клас визначає загальний скелет алгоритму роботи з рівняннями: ініціалізацію, генерацію параметрів, розв'язання та формування покрокового пояснення, тоді як конкретні підкласи реалізують специфічну логіку для кожного типу тригонометричних рівнянь (наприклад, однорідних, симетричних чи таких, що розв'язуються методом заміни). Такий підхід забезпечує дотримання принципу відкритості/закритості (Open/Closed Principle), дозволяючи додавати нові типи рівнянь без модифікації існуючого коду базової логіки. Поліморфізм дозволяє системі уніфіковано обробляти різні типи рівнянь, викликаючи відповідні методи генерації та розв'язання залежно від контексту.

Особливу увагу приділено алгоритмічному підходу до генерації задач. Замість прямого методу, який полягає у випадковому виборі коефіцієнтів з подальшою перевіркою дискримінанта, було застосовано метод «зворотного інжинірингу». Суть методу полягає у першочерговому виборі «гарних» (табличних) коренів або проміжних значень змінної, на основі яких за допомогою теореми Вієта або обернених тригонометричних перетворень обчислюються необхідні коефіцієнти рівняння. Це гарантує, що згенеровані задачі завжди матимуть розв'язок у межах шкільної програми та будуть методично коректними. Реалізація цього підходу вимагала використання можливостей Python для роботи з раціональними числами та ірраціональностями, що також забезпечується бібліотекою SymPy.

Для відображення математичних формул у зрозумілому для користувача вигляді використано мову розмітки LaTeX. Вона є стандартом де-факто у науковій спільноті для типографіки складних математичних виразів. Інтеграція SymPy дозволяє автоматично конвертувати внутрішні об'єкти програми (символьні вирази) у LaTeX-рядки. Це забезпечує високу якість візуалізації умов задач та кроків розв'язання, дозволяючи коректно відображати дроби, степені, грецькі літери та математичні оператори. У поєднанні з шаблонними рядками (f-strings) мови Python, це дозволило побудувати гнучку систему генерації текстових пояснень, де динамічно підставляються обчислені значення та формули.

Таким чином, комплексне використання мови Python, бібліотеки символьних обчислень SymPy, об'єктно-орієнтованої архітектури та мови розмітки LaTeX створює надійний фундамент для функціонування системи. Такий технологічний стек забезпечує необхідну точність математичних операцій, гнучкість у налаштуванні складності завдань та високу якість вихідних матеріалів.

2.2 Архітектура розробленої системи

Проектування архітектури інформаційної системи генерації навчального математичного контенту здійснювалося з дотриманням принципів системного аналізу та об'єктно-орієнтованого підходу. Головною метою при розробці архітектурного рішення було створення гнучкого, модульного середовища, яке дозволяє легко інтегрувати нові типи математичних задач без необхідності внесення змін у наявне ядро системи. Архітектура програмного засобу може бути класифікована як багаторівнева, де чітко розмежовані шари бізнес-логіки (математичне моделювання), управління даними (символьні обчислення) та представлення (генерація LaTeX-документів).

Центральним елементом архітектури є ієрархічна структура класів, побудована на базі абстрактного класу `TrigonometricEquation`. Цей клас виступає фундаментальним будівельним блоком системи, визначаючи уніфікований інтерфейс для всіх типів тригонометричних рівнянь. У ньому інкапсульовано загальні механізми, необхідні для функціонування будь-якого математичного об'єкта системи: ініціалізацію символьних змінних бібліотеки SymPy, управління життєвим циклом об'єкта рівняння, а також методи експорту результатів у формат PDF.

Для забезпечення розширюваності системи було застосовано поведінковий патерн проектування «Шаблонний метод» (Template Method). У базовому класі реалізовано каркас основного алгоритму обробки рівняння в конструкторі `__init__`, який послідовно викликає методи генерації умови, розв'язання та формування пояснень. При цьому самі методи `__generate()`, `__solve()` та `__build_solution_steps()` оголошені як абстрактні або містять базову реалізацію, що підлягає перевизначенню в дочірніх класах. Такий підхід гарантує, що додавання нового типу рівняння (наприклад, рівняння, що розв'язується введенням допоміжного кута) вимагає лише створення нового класу-спадкоємця та реалізації специфічної для нього математичної логіки, залишаючи інфраструктурний код незмінним. Це забезпечує виконання принципу відкритості/закритості (Open/Closed Principle) SOLID (Рис. 1).

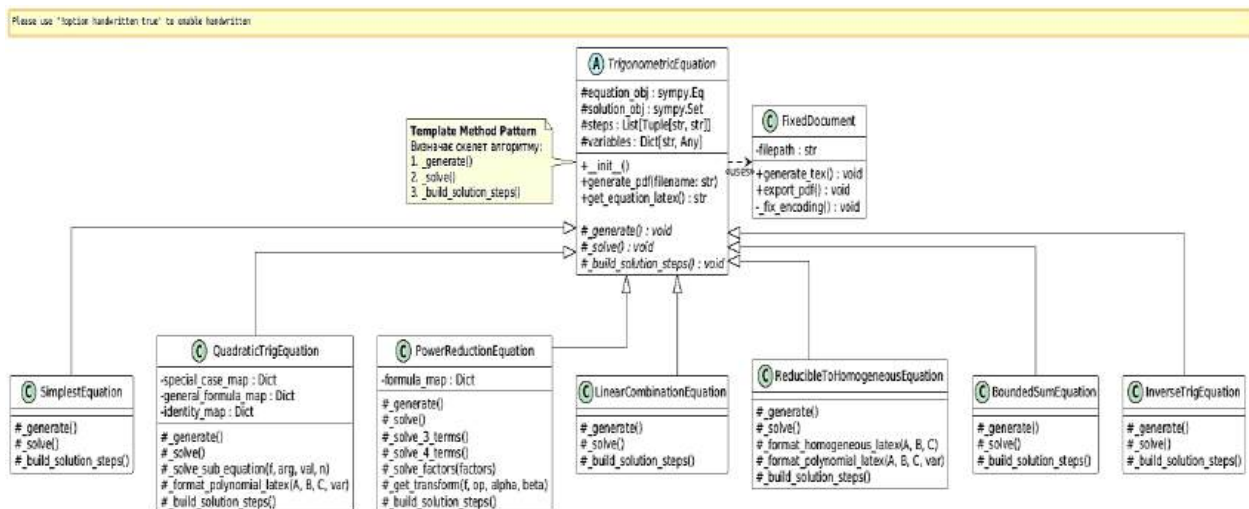


Рис. 1. Часткова діаграма класів розробленої системи

Джерело: авторська розробка

Спеціалізовані класи, такі як `HomogeneousEquation` (однорідні рівняння) або `InverseTrigEquation` (рівняння з оберненими тригонометричними функціями), виступають як контейнери для специфічних алгоритмів. Наприклад, клас `QuadraticTrigEquation` містить логіку зведення тригонометричного рівняння до алгебраїчного квадратного рівняння шляхом заміни змінної, включаючи перевірку дискримінанта та фільтрацію коренів, що не входять до області визначення. Така інкапсуляція дозволяє ізолювати складність окремих математичних методів, роблячи загальну структуру системи прозорою та керованою. При цьому алгоритм проходить через вузол перевірки типу рівняння, де для однорідних структур застосовується оптимізований шлях без надлишкових обчислень ОДЗ.

Важливою особливістю архітектури є підхід до управління даними. Система відмовляється від використання примітивних типів даних (чисел з плаваючою комою) на користь символічних об'єктів бібліотеки SymPy. Це дозволяє уникнути помилок округлення, властивих машинній арифметиці, та зберігати математичні константи у їх точному аналітичному вигляді протягом усього циклу обробки. Внутрішній стан кожного об'єкта рівняння зберігається у спеціалізованому словнику атрибутів `self.variables`. Цей словник виконує роль контекстного сховища, куди під час генерації записуються згенеровані коефіцієнти, проміжні змінні та корені.

Використання єдиного контекстного сховища є критично важливим для етапу формування методичних пояснень. При генерації покрокового розв'язання система звертається до цього словника для динамічного заповнення текстових шаблонів. Це дозволяє створювати адаптивні пояснення, де текст змінюється залежно від значень коефіцієнтів (наприклад, вибір формули коренів для парного або непарного коефіцієнта, або зміна знаку в формулі залежно від чверті одиничного кола).

2.3 Алгоритм генерації та перевірки коректності тригонометричних рівнянь

Основним викликом при автоматизованій генерації математичних задач навчального характеру є забезпечення дидактичної цінності отриманого матеріалу. Прямий метод генерації, що полягає у випадковому виборі числових значень коефіцієнтів рівняння, у контексті тригонометрії є неефективним. Це зумовлено тим, що довільний набір коефіцієнтів з високою ймовірністю призводить до появи ірраціональних дискримінантів, нетабличних значень обернених тригонометричних функцій або відсутності дійсних коренів взагалі. Для вирішення цієї проблеми у розробленій системі застосовано стратегію конструктивної генерації, відому як метод «зворотного інжинірингу» або метод генерації «від відповіді».

Для класу рівнянь, що зводяться до алгебраїчних (квадратних відносно однієї тригонометричної функції, однорідних тощо), алгоритм ініціюється вибором множини допустимих значень заміни змінної. У системі сформовано попередньо визначені пули дидактично доцільних значень. До цього набору входять цілі числа, раціональні дроби та ірраціональні числа, що відповідають табличним значенням тригонометричних функцій.

Блок-схема алгоритму генерації для таких рівнянь представлена на рисунку 2 та складається з наступних етапів:

1. Стохастичний вибір коренів. З пулу допустимих значень випадковим чином обирається пара коренів. На цьому етапі застосовуються фільтри сумісності: наприклад, для рівнянь відносно синуса та косинуса відкидаються пари, де обидва корені за модулем перевищують одиницю, оскільки це призведе до відсутності розв'язків.
2. Побудова алгебраїчного ядра. На основі теореми Вієта формується зведене квадратне рівняння.
3. Нормалізація коефіцієнтів. Оскільки отримані коефіцієнти можуть бути дробовими або містити ірраціональності у знаменниках, виконується процедура приведення до цілочисельного або стандартного ірраціонального вигляду. Система обчислює найменше спільне кратне знаменників усіх коефіцієнтів та домножує на нього все рівняння. Це дозволяє отримати рівняння вигляду, що є звичним для шкільних підручників.
4. Трансформація у тригонометричний вигляд. Змінна замінюється на відповідну тригонометричну функцію.

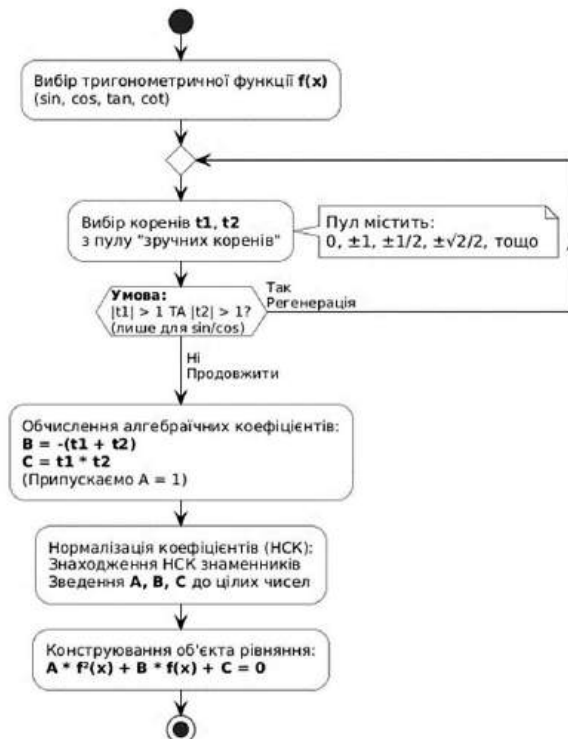


Рис. 2. Блок-схема алгоритму генерації квадратних тригонометричних рівнянь

Джерело: авторська розробка

Для рівнянь виду (LinearCombinationEquation) застосовується інший підхід, оскільки прямий вибір часто призводить до «некрасивого» значення допоміжного кута, яке неможливо обчислити без калькулятора.

Алгоритм базується на фіксації цільового допоміжного кута. Процес генерації відбувається у такій послідовності: Обирається бажаний кут зсуву з множини табличних кутів, наприклад.

Обирається бажана амплітуда – гіпотенуза трикутника коефіцієнтів.

Коефіцієнти розраховуються як катети прямокутного трикутника.

Вільний член обирається як добуток амплітуди на табличне значення синуса або косинуса. Такий підхід гарантує, що при діленні рівняння учні отримають впізнавані значення тригонометричних функцій, що дозволить згорнути вираз у формулу синуса або косинуса суми.

Важливою складовою алгоритмічного забезпечення є багаторівнева система перевірки коректності (валідації) згенерованих задач. Перевірка здійснюється як на етапі генерації параметрів, так і на етапі формування кінцевого об'єкта рівняння.

Перший рівень валідації – перевірка області визначення та множини значень. Для рівнянь система автоматично відстежує, щоб хоча б один із коренів алгебраїчного рівняння-аналога належав відрізьку $[-1; 1]$. Якщо ця умова не виконується, генерується виключна ситуація, яка перехоплюється керуючим алгоритмом, і процес генерації перезапускається з новими параметрами. Для рівнянь з тангенсом та котангенсом перевіряється, щоб аргумент функції не потрапляв у точки розриву.

Другий рівень валідації – перевірка на виродженість та тривіальність. Алгоритми містять евристичні правила, що запобігають створенню рівнянь, де старший коефіцієнт дорівнює нулю (перетворення квадратного рівняння у лінійне), або де всі коефіцієнти скорочуються до тотожності. Зокрема, у класі `PowerReductionEquation` (рівняння на пониження степеня) реалізовано перевірку на унікальність аргументів функцій, щоб уникнути ситуації взаємного знищення доданків при алгебраїчних перетвореннях (Рис. 3).

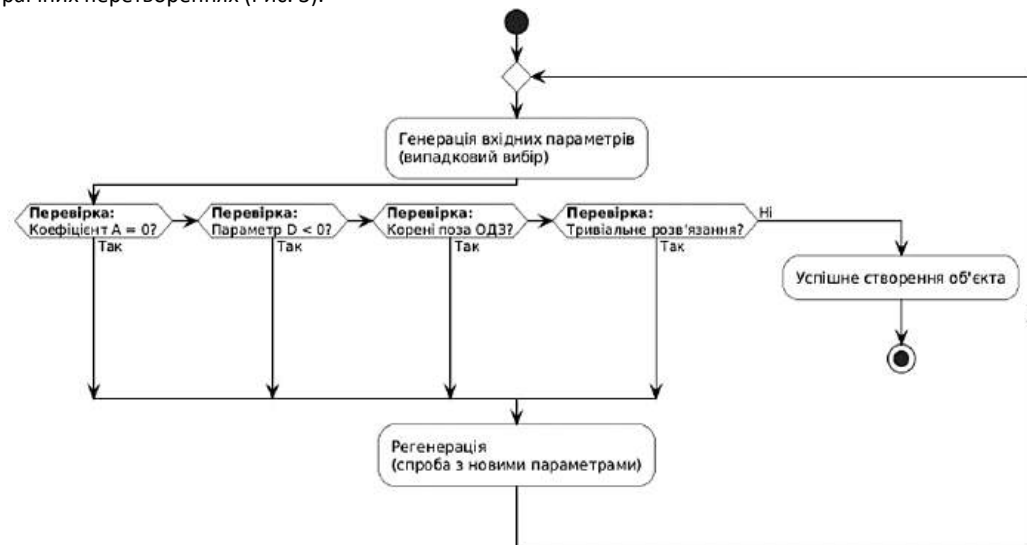


Рис. 3. Схема валідації параметрів

Джерело: авторська розробка

Третій рівень – перевірка структурної цілісності. Завдяки використанню бібліотеки символічної математики `SymPy`, система виконує спрощення згенерованих виразів `sympy.simplify()`. Це дозволяє виявити та усунути надлишкову складність (наприклад, скоротити дроби в коефіцієнтах або прибрати зайві мінуси) ще до того, як задача буде представлена користувачеві.

Запропоновані алгоритми забезпечують стабільну генерацію математично коректних, різноманітних та методично виважених тригонометричних рівнянь, що є необхідною умовою для використання розробленої системи в освітньому процесі.

Таким чином, спроектовано та програмно реалізовано систему автоматизованої генерації тригонометричних рівнянь, що базується на інтеграції мови `Python`, бібліотеки символічних обчислень `SymPy` та системи комп'ютерної верстки `LaTeX`. Обґрунтований вибір технологічного стека дозволив забезпечити абсолютну аналітичну точність операцій, уникнувши похибок округлення, властивих чисельним методам, та гарантувати високу поліграфічну якість візуалізації математичних формул у вихідних документах.

Архітектура комплексу, побудована на принципах об'єктно-орієнтованого програмування із застосуванням патерна «Шаблонний метод», забезпечила модульність системи та уніфікацію процесів обробки різноманітних рівнянь. Ключовим досягненням роботи стала реалізація алгоритмів конструктивної генерації методом «зворотного інжинірингу», які, у поєднанні з багаторівневою системою валідації параметрів, гарантують створення методично коректних завдань із прогнозованими «зручними» розв'язками, що робить розроблену систему ефективним інструментом для створення дидактичного контенту.

3 Типологія та класифікація згенерованих завдань

Розроблена система покриває повний спектр тригонометричних рівнянь, передбачених шкільною програмою поглибленого рівня та університетськими курсами елементарної математики. Реалізовані алгоритми («генератори») можна класифікувати за математичним методом розв'язання, що лежить в їх основі.

Фундаментом системи є генерація рівнянь, що зводяться до алгебраїчних шляхом заміни змінної. Сюди входять:

- найпростіші рівняння (`SimplestEquation`): базові конструкції, які є будівельними блоками для всіх інших типів;

- квадратні рівняння (QuadraticTrigEquation): рівняння виду $A f^2(x) + B f(x) + C = 0$, що розв'язуються заміною $t = f(x)$;
 - рівняння з формулами подвійного аргументу (DoubleAngleToQuadraticEquation): задачі, що потребують попереднього спрощення для зведення до квадратного.
- Іншою групою алгоритмів є методи розкладання на множники та перетворень, дана група формул рівняння, розв'язання яких вимагає застосування тригонометричних тотожностей для факторизації виразу:
- сума/різниця в добуток (SumToProductEquation): використання формул $\sin(\alpha) \pm \sin(\beta)$ для отримання добутку, що дорівнює нулю;
 - метод групування (GroupingEquation): складніші вирази з 4-ма і більше доданками, які потрібно згрупувати для винесення спільного множника;
 - пониження степеня (PowerReductionEquation): рівняння з квадратами синуса чи косинуса, де ключовим кроком є перехід до функцій подвійного аргументу;
 - структурні методи (однорідність та лінійна комбінація) є окремою категорією алгоритмів, що відповідає за генерацію рівнянь зі специфічною структурою;
 - однорідні рівняння (HomogeneousEquation) та ті, що зводяться до них (ReducibleToHomogeneousEquation): рівняння, де всі члени мають однаковий сумарний степінь, що дозволяє виконати ділення на $\cos^n(x)$ і перейти до $tg(x)$;
 - метод допоміжного кута (LinearCombinationEquation): рівняння виду $A \sin(x) + B \cos(x) = C$. Система гарантує підбір коефіцієнтів a, b , що відповідають табличним значенням синуса і косинуса.
- Для перевірки поглиблених знань реалізовано генератори, що базуються на неочевидних підстановках:
- симетричні рівняння (SymmetricEquation): використовують заміну $t = \sin(x) \pm \cos(x)$, що дозволяє виразити добуток $\sin(x) \cos(x)$ через t ;
 - універсальні та спеціальні заміни (TanSubstitutionEquation, SumTanCotanEquation): рівняння, що розв'язуються через $t = tg(x)$ або $t = tg(x) + ctg(x)$.
- Також реалізовано алгоритм генерації для методу оцінки (BoundedSumEquation): нестандартні рівняння (наприклад, $\sin(x) + \cos(5x) = 2$), що розв'язуються через аналіз області значень.
- Останнім алгоритмом є генерація рівнянь з арк-функціями (InverseTrigEquation): алгебраїчні рівняння, де змінна знаходиться під знаком оберненої тригонометричної функції.
- Результатом роботи системи є файл у форматі PDF, зверстаний за допомогою системи LaTeX. Такий формат є стандартом для науково-технічної документації, забезпечуючи ідеальну читабельність формул, крос-платформність та готовність до друку.

4 Аналіз якості та методологічні зауваження

Використання бібліотеки SymPy гарантує математичну точність, проте апробація системи виявила потребу в адаптації машинних результатів до шкільних стандартів. Ключовою проблемою є специфіка канонізації розв'язків: SymPy часто генерує надлишкові об'єднання множин (наприклад, окремі серії коренів замість однієї компактною формули). Для подолання цього ефекту в програмному комплексі реалізовано евристичні алгоритми постобробки, які виконують примусове «згортання» періодичних серій у загальноприйнятий формат.

Іншим аспектом є особливості автоматичного спрощення виразів. Критерії мінімізації символів у SymPy іноді призводять до «непедагогічних» трансформацій, що ускладнюють розуміння логіки перетворень (наприклад, передчасне розкриття дужок або нестандартна робота з ірраціональностями). Інтегрований модуль примусового форматування поліномів блокує стандартні спрощення на етапі візуалізації, забезпечуючи звичний для учнів вигляд коефіцієнтів.

Також враховано архітектурну детермінованість методів розв'язання. Попри існуючу в математиці варіативність підходів (наприклад, вибір між методом допоміжного кута та діленням у однорідних рівняннях), система безальтернативно обирає алгоритм, заданий параметрами генерації. Таке обмеження є свідомим методичним рішенням, орієнтованим на відпрацювання конкретної навчальної теми.

5 Оцінка надійності та верифікація результатів

Розроблена система базується на ядрі символічних обчислень SymPy, що гарантує фундаментальну математичну коректність логіки. Разом з тим, складність алгоритмізації тригонометричних перетворень зумовлює виникнення поодиноких технічних аномалій у граничних випадках генерації параметрів (менше 1% випадків за результатами апробації).

Для нівелювання цих ризиків у програмі реалізовано:

- Механізм перехоплення виключень (Exception Handling): при виявленні некоректної структури рівняння система автоматично ініціює повторну генерацію варіанта.
- Алгоритми пост-обробки: фільтри валідації забезпечують педагогічно доцільне візуальне подання проміжних кроків розв'язку.

Поєднання потужних обчислювальних можливостей бібліотеки із розробленими правилами методичної фільтрації дозволяє генерувати дидактичні матеріали, що за якістю відповідають роботі досвідченого методиста, суттєво скорочуючи час на підготовку. Подальше вдосконалення системи спрямоване на оптимізацію відображення нестандартних математичних конструкцій у рідкісних випадках.

6 Методика та результати впровадження системи

6.1 Методичні рекомендації до застосування

Використання генератора дозволяє оптимізувати роботу вчителя, зміщуючи акцент з рутинної підготовки матеріалів на індивідуальну роботу. Основними формами застосування є:

- Контрольно-оцінювальна діяльність: швидке формування унікальних варіантів для поточного та підсумкового контролю, що мінімізує ризики академічної недоброчесності. Система дозволяє компонувати як однотипні тренувальні вправи, так і комплексні білети з завданнями різних рівнів складності.

- Методичний супровід самостійної роботи: використання згенерованих покрокових розв'язків як індивідуальних карток-інструкцій. Це дозволяє реалізувати модель «перевернутого класу», де учні самостійно опрацьовують алгоритми, а аудиторний час приділяється аналізу складних випадків.

- Корекційне навчання: генерація персоналізованих наборів завдань для роботи над помилками. Учень отримує можливість порівняти власний розв'язок із еталонним, що сприяє формуванню стійкої алгоритмічної навички та розвитку критичного мислення.

Вихідний код та зразки матеріалів доступні у репозиторії: <https://github.com/nazariyrbchynskyi/equagen>.

6.2 Апробація та аналіз ефективності

Педагогічний експеримент проведено на базі ліцею Чернівецької області (10 клас) на пропедевтичному етапі вивчення теми «Тригонометричні рівняння». Учні було розподілено на дві групи:

1. Контрольна група (14 учнів): самопідготовка за традиційними підручниками.

2. Експериментальна група (15 учнів): використання Telegram-бота, інтегрованого з розробленою системою, для генерації прикладів із покроковими розв'язками.

Педагогічний експеримент тривав протягом двох тижнів. На початковому етапі було встановлено однорідність груп за рівнем попередньої підготовки. Під час формувального етапу учні експериментальної групи виконували індивідуальні набори завдань, згенеровані системою, що охоплювали такі типи вправ: розв'язання базових тригонометричних рівнянь, рівнянь, що зводяться до квадратних, та однорідних рівнянь першого і другого порядків, знаходження загального розв'язку та відбір коренів на заданому проміжку.

Контрольний зріз знань проводився у формі письмової контрольної роботи, яка складалася з п'яти завдань різного рівня складності.

Результати дослідження: Аналіз контрольної роботи засвідчив, що в експериментальній групі середній бал був на 15–20% вищим, ніж у контрольній. Учні, які працювали з ботом, продемонстрували вищу алгоритмічну культуру та значно меншу кількість помилок у записах загальних формул коренів.

Одержані результати мають характер пілотного дослідження. Хоча обсяг вибірки (n=29) обмежений рамками одного закладу освіти, виявлена позитивна динаміка успішності (на 15–20%) дозволяє зробити висновок про перспективність подальшого масштабування методики.

Опитування учасників педагогічного експерименту підтвердило, що наявність миттєвого зворотного зв'язку через покрокові пояснення підвищує автономність учнів та скорочує час на опанування типових операцій. Таким чином, апробація підтвердила ефективність системи як інструменту підвищення якості математичної освіти та успішної реалізації диференційованого підходу.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

У статті розв'язано актуальну науково-прикладну задачу автоматизації створення варіативних дидактичних матеріалів з математики шляхом розробки спеціалізованого програмного забезпечення на базі мови Python та бібліотеки SymPy. Наукова новизна отриманих результатів полягає в обґрунтуванні алгоритмів «зворотного інжинірингу», які дозволили подолати проблему непередбачуваності складності коренів та гарантувати методичну відповідність згенерованих завдань чинним навчальним програмам.

Практична значущість роботи підтверджена результатами педагогічного експерименту, згідно з якими впровадження системи як засобу методичного супроводу сприяло підвищенню успішності учнів на 15–20% при одночасному скороченні часових витрат вчителя на підготовку до занять. Оцінка надійності програмного комплексу засвідчила, що реалізовані механізми валідації та адаптивного форматування ефективно нівелюють технічні аномалії машинного виводу, забезпечуючи високу якість кінцевого продукту. Подальший розвиток дослідження вбачається у розширенні бібліотеки алгоритмів на інші розділи алгебри та інтеграції розробленого ядра у веб-орієнтовані освітні платформи для масштабування отриманого досвіду.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори заявляють про відсутність фінансових, особистих чи інших інтересів, що можуть розглядатися як потенційний конфлікт інтересів щодо публікації цієї статті.

ДЖЕРЕЛА ФІНАНСУВАННЯ

Роботу виконано за відсутності фінансової підтримки з боку будь-яких організацій.

ДОСТУПНІСТЬ ДАНИХ

Це дослідження не передбачало використання окремих наборів даних.

ВИКОРИСТАННЯ ЗАСОБІВ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Автори використовували інструменти ШІ (зокрема Gemini) для технічного оформлення списку використаних джерел та References відповідно до вимог видання, а також для перевірки граматики й пунктуації. Автори здійснили критичну перевірку та редагування отриманого результату і несуть повну відповідальність за зміст статті.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Боднарук, С. Б., Колісник, Р. С., & Сікора, В. С. (2024). *Рівняння і нерівності в старшій школі*. Методичні рекомендації. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т.
2. Волянська, О., & Лемішко, І. І. (2017). Використання комп'ютерних технологій під час вивчення тригонометричних рівнянь. *Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики: до 70-річчя кафедри математики і теорії та методики навчання математики НПУ імені М. П. Драгоманова* : матеріали Міжнар. наук.-практ. конф. (м. Київ, 11–13 трав. 2017 р.). Київ : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 100–101.
3. Істер, О. С., & Єрґіна, О. В. (2018). *Алгебра і початки аналізу : (профіль. рівень)* : підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти. Київ : Генеза.
4. Мерзляк, А. Г., Номіровський, Д. А., Полонський, В. Б., & Якір, М. С. (2018). *Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на поглибленому рівні з 8 кл. : профільний рівень* : підруч. для 10 кл. закл. заг. серед. освіти. Харків : Гімназія.
5. Міністерство освіти і науки України (2017а). *Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10–11 класів загальноосвітніх навчальних закладів*. Рівень стандарту. URL: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika-riven-standartu.docx>
6. Міністерство освіти і науки України (2017б). *Навчальна програма з математики для учнів 10–11 класів (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу) загальноосвітніх навчальних закладів*. URL: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika-poglibl-rivenfinal.docx>
7. Міністерство освіти і науки України (2017с). *Навчальна програма з математики для учнів 10–11 класів загальноосвітніх навчальних закладів*. Профільний рівень. URL: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika-profilnij-rivenfinal.docx>
8. Нелін, Є. П. (2018). *Алгебра і початки аналізу (профільний рівень)* : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків : Ранок.
9. Ali, A., & Khusro, S. (2024). SA-MEAS: Sympy-based automated mathematical equations analysis and solver. *SoftwareX*, 25, 101596. <https://doi.org/10.1016/j.softx.2023.101596>
10. Chan, K. W., Ali, F., Park, J., Sham, K. S. B., Tan, E. Y. T., Chong, F. W. C., Qian, K., & Sze, G. K. (2025). Automatic item generation in various STEM subjects using large language model prompting. *Computers and Education: Artificial Intelligence*, 8, 100344. <https://doi.org/10.1016/j.caeai.2024.100344>
11. Fitri, P., Hartono, Y., & Meryansumayeka, M. (2025). Learning proof of trigonometric identities with ChatGPT. *Journal of Honai Math*, 8(1), 43–56. <https://doi.org/10.30862/jhm.v8i1.755>
12. Karbasi, K., Hong, K., Samadi, M. A., & Pottie, G. (2025). *Multi-Agent Collaborative Framework For Math Problem Generation*. 613–618. <https://doi.org/10.5281/zenodo.15870246>

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Bodnaruk, S. B., Kolisnyk, R. S., & Sikora, V. S. (Eds.). (2024). *Rivniannia i nerivnosti v starshii shkoli. Metodychni rekomendatsii* [Equations and inequalities in high school: Methodological recommendations]. Chernivtsi National University. (in Ukrainian)
2. Volianska, O., & Lemishko, I. I. (2017). Vykorystannia kompiuternykh tekhnolohii pid chas vuvchennia trygonometrychnykh rivnian [The use of computer technologies in studying trigonometric equations]. In *Aktualni problemy teorii i metodyky navchannia matematyky* (pp. 100–101). National Pedagogical Dragomanov University. (in Ukrainian)
3. Ister, O. S., & Yerhina, O. V. (2018). *Alhebra i pochatky analizu (profilnyi riven): Pidruchnyk dlia 10 klasu zakladiv zahalnoi serednoi osvity* [Algebra and beginnings of analysis (profile level): Textbook for grade 10]. Geneva. (in Ukrainian)
4. Merzlyak, A. H., Nomirovskiy, D. A., Polonskiy, V. B., & Yakir, M. S. (2018). *Alhebra i pochatky analizu: Profilnyi riven (pochatok vuvchennia z 8 klasu): Pidruchnyk dlia 10 klasu zakladiv zahalnoi serednoi osvity* [Algebra and beginnings of analysis: Profile level]. Himmaziia. (in Ukrainian)
5. Ministry of Education and Science of Ukraine. (2017a). *Navchalna prohrama z matematyky (alhebra i pochatky analizu ta heometriia) dlia uchniv 10–11 klasiv zakladiv zahalnoi serednoi osvity. Riven standartu* [Mathematics curriculum for grades 10–11. Standard level]. URL: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika-riven-standartu.docx> (in Ukrainian)
6. Ministry of Education and Science of Ukraine. (2017b). *Navchalna prohrama z matematyky dlia uchniv 10–11 klasiv (pochatok vuvchennia na pohlyblyenomiu rivni z 8 klasu)* [Mathematics curriculum for grades 10–11 (advanced level)]. URL: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika-poglibl-rivenfinal.docx> (in Ukrainian)
7. Ministry of Education and Science of Ukraine. (2017c). *Navchalna prohrama z matematyky dlia uchniv 10–11 klasiv. Profilnyi riven* [Mathematics curriculum for grades 10–11. Profile level]. URL: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika-profilnij-rivenfinal.docx> (in Ukrainian)
8. Nelin, Ye. P. (2018). *Alhebra i pochatky analizu (profilnyi riven): Pidruchnyk dlia 10 klasu zakladiv zahalnoi serednoi osvity* [Algebra and beginnings of analysis (profile level)]. Ranok. (in Ukrainian)
9. Ali, A., & Khusro, S. (2024). SA-MEAS: Sympy-based automated mathematical equations analysis and solver. *SoftwareX*, 25, 101596. <https://doi.org/10.1016/j.softx.2023.101596>
10. Chan, K. W., Ali, F., Park, J., Sham, K. S. B., Tan, E. Y. T., Chong, F. W. C., Qian, K., & Sze, G. K. (2025). Automatic item generation in various STEM subjects using large language model prompting. *Computers and Education: Artificial Intelligence*, 8, 100344. <https://doi.org/10.1016/j.caeai.2024.100344>
11. Fitri, P., Hartono, Y., & Meryansumayeka, M. (2025). Learning proof of trigonometric identities with ChatGPT. *Journal of Honai Math*, 8(1), 43–56. <https://doi.org/10.30862/jhm.v8i1.755>
12. Karbasi, K., Hong, K., Samadi, M. A., & Pottie, G. (2025). *Multi-Agent Collaborative Framework For Math Problem Generation*. 613–618. <https://doi.org/10.5281/zenodo.15870246>

| Матеріал надійшов до редакції: 28.01.2026 р. | Прийнято до друку: 05.03.2026 р. | Опубліковано: 30.04.2026 р. |



ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА ВІЗУАЛІЗАЦІЯ ТА ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИФРАКЦІЇ ФРАУНГОФЕРА ВІД ВПОРЯДКОВАНИХ І НЕВПОРЯДКОВАНИХ НЕПРОЗОРИХ МІКРОСТРУКТУР ДЛЯ ОСВІТНЬОЇ ПРАКТИКИ

Олексій ВОРОНКІН ✉

Ноттінгемський університет, Велика Британія
Oleksii.Voronkin1@nottingham.ac.uk
<https://orcid.org/0000-0003-4088-7147>

Сергій ЛУЩИН

Національний університет «Запорізька політехніка», Україна
luschin@zp.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0003-2135-0520>

EXPERIMENTAL VISUALIZATION AND NUMERICAL SIMULATION OF FRAUNHOFER DIFFRACTION FROM ORDERED AND DISORDERED OPAQUE MICROSTRUCTURES FOR EDUCATION PRACTICE

Oleksii VORONKIN ✉

University of Nottingham, United Kingdom
Oleksii.Voronkin1@nottingham.ac.uk
<https://orcid.org/0000-0003-4088-7147>

Sergiy LUSHCHIN

National University Zaporizhzhia Polytechnic, Ukraine
luschin@zp.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0003-2135-0520>

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. У викладанні дифракції Фраунгофера експериментальні підходи, які чітко демонструють зв'язок між структурами в реальному просторі та їхнім представленням у просторі Фур'є, залишаються обмеженими за доступністю та масштабом застосування. У цій роботі представлено простий, недорогий і наочний метод, що дозволяє студентам спостерігати дифракційні картини та систематично досліджувати вплив виробничих відхилень друкованих оптичних масок.

Матеріали і методи. Метод поєднує експериментальну візуалізацію за допомогою бінарних амплітудних масок, надрукованих на прозорій плівці стандартним офісним лазерним принтером, та освітлення напівпровідниковою лазерною указкою, із чисельним моделюванням на основі двовимірного швидкого перетворення Фур'є, реалізованого в Python. Мікроструктури, що охоплюють одновимірні дифракційні ґратки, двовимірні періодичні ґратки та структури з базисом (центрована та гексагональна ґратки), а також неупорядковані ансамблі та квазігіперуніформні конфігурації, безпосередньо порівнюються між експериментом і моделюванням. Це порівняння дозволяє детально проаналізувати, як відхилення, зумовлені друком – включно з локальними спотвореннями, помилками позиціонування, розтіканням тонера та частковим злиттям елементів – впливають на дифракційні характеристики.

Результати. Результати демонструють, що в періодичних структурах положення максимумів дифракції добре відповідають заданій геометрії, тоді як технологічні недосконалості переважно модулюють інтенсивності, частково відновлюють номінально заборонені порядки та створюють слабкі додаткові максимуми. У неупорядкованих масивах друкованих дисків збільшений ефективний розмір структурних елементів та полідисперсність у надрукованій геометрії призводять до значного згладжування та пригнічення дифракційних кілець вищих порядків, тоді як накладені ближні кореляції створюють характерні особливості, такі як центральне темне кільце. Ці результати ілюструють, як тонкі систематичні та випадкові відхилення від ідеалізованих бінарних амплітудних масок впливають на картини фраунгоферової дифракції, перетворюючи типові артефакти друку на цінний педагогічний інструмент.

ABSTRACT

Formulation of the Problem. In teaching Fraunhofer diffraction, experimental approaches that clearly reveal the relationship between real-space structures and their Fourier-space representation remain limited in accessibility and scope. This work presents a simple, low-cost, and visually effective method that enables students to observe diffraction patterns and systematically investigate the influence of fabrication-induced imperfections in printed optical masks.

Materials and Methods. The approach combines experimental visualization using binary amplitude masks printed on transparent film with a standard office laser printer and illumination by a low-power semiconductor laser pointer, with numerical simulations based on two-dimensional fast Fourier transforms implemented in Python. Microstructures ranging from one-dimensional gratings to two-dimensional periodic lattices and structures with a basis (centered and honeycomb), as well as disordered ensembles and quasi-hyperuniform configurations, are directly compared between experiment and simulation. This comparison allows detailed analysis of how printer-induced deviations – including local distortions, positioning errors, toner spreading, and partial merging of elements – affect the resulting diffraction features.

Results. The results demonstrate that in periodic structures the positions of diffraction maxima closely follow the designed geometry, while fabrication-induced imperfections primarily modulate intensities, partially restore nominally forbidden orders, and generate weak additional maxima. In disordered arrays of printed disks, the increased effective feature size and polydispersity in the printed geometry lead to strong smoothing and suppression of the higher-order diffraction rings, whereas imposed short-range correlations produce characteristic features such as a central dark ring. These findings illustrate how subtle systematic and stochastic deviations from idealized binary amplitude masks influence Fraunhofer diffraction patterns, thereby transforming typical printing artefacts into a valuable pedagogical tool.

Conclusion. From an educational perspective, the method provides an affordable, hands-on platform for exploring Fraunhofer diffraction, Fourier optics, reciprocal-space concepts, and statistical correlations. By bridging idealized theoretical models, realistic fabrication limitations, and numerical

Висновки. З освітньої точки зору метод забезпечує доступну практичну платформу для вивчення фраунгоферової дифракції, оптики Фур'є, концепцій оберненого простору та статистичних кореляцій. Поєднуючи ідеалізовані теоретичні моделі, реальні обмеження виготовлення та чисельне моделювання, він особливо добре підходить для лабораторних курсів з оптики у вищій освіті.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: дифракція Фраунгофера; експериментальна візуалізація; чисельне моделювання; оптика Фур'є; впорядковані та невпорядковані системи; лазерний друк мікроструктур.

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Voronkin O., Lushchin S. Experimental visualization and numerical simulation of fraunhofer diffraction from ordered and disordered opaque microstructures for education practice. *Фізико-математична освіта*, 2026. Том 41. № 2. С. 28-45. <https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i2-03>.

simulation, it is particularly well suited for undergraduate laboratory courses in wave optics.

KEYWORDS: Fraunhofer diffraction; experimental visualization; numerical simulation; Fourier optics; ordered and disordered systems; laser printing of microstructures.

FOR CITATION: Voronkin, O., & Lushchin, S. (2026). Experimental visualization and numerical simulation of fraunhofer diffraction from ordered and disordered opaque microstructures for education practice. *Physical and Mathematical Education*, 41(2), 28-45. <https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i2-03>.

INTRODUCTION

Problem statement. Fraunhofer diffraction remains one of the most visually striking and pedagogically valuable phenomena in wave optics. It provides a direct experimental visualization of how the size, shape, and spatial arrangement of obstacles affect the resulting far-field pattern, making diffraction experiments powerful tools for instructional physics courses and educational visualizations of ordered and disordered optical structures. At the same time, there remains a need for accessible experimental approaches that facilitate students' understanding of diffraction from a variety of ensembles and clearly demonstrate the correspondence between real and reciprocal space.

This correspondence between object geometry and the far-field diffraction pattern is illustrated by well-known atmospheric diffraction phenomena, such as coronae around the Sun and Moon, whose ring structure is governed by Fraunhofer diffraction from nearly monodisperse cloud droplets (Cowley et al., 2005).

Literature review. Similar phenomena can be reproduced in the classroom using controlled scatterer ensembles. High-resolution laser printers enable sufficiently regular microstructures that yield diffraction patterns comparable to optical gratings (Brady & Boardman, 1995; Van Hook, 2007). The resulting patterns resemble Laue X-ray diffraction photographs, illustrating the connection between crystallography and optical diffraction. Optical Laue diffraction has been demonstrated on two-dimensional photonic structures with hexagonal packing (Naimi, 2013), while modern approaches employ computer-generated masks on spatial light modulators, forming complex structures in real time and allowing instantaneous observation of their Fourier images (Huang et al., 2012). Diffraction patterns for all five two-dimensional Bravais lattices have also been reproduced using pairs of linear gratings (Tsutaoka et al., 2014).

The pedagogical value of such experiments is enhanced when integrated with numerical simulation. Direct comparison of observed patterns with computed Fourier transforms allows students to trace the correspondence between real-space geometry and reciprocal-space representation (Peinado et al., 2012) and explore the effects of periodicity, defects, statistical fluctuations, and scatterer size on the far-field structure.

Particular interest arises when the scatterers consist of ensembles of opaque disks with disordered or correlated placements. Each disk acts as a two-dimensional optical analog of a spherical microparticle, so that the far-field diffraction pattern provides a vivid model for powder X-ray diffraction, light scattering from colloids, and two-dimensional particle arrays.

The progression from ordered structures (discrete Bragg peaks) through Poisson-distributed configurations to hyperuniform ensembles (suppressing small-angle scattering) makes the evolution of the structure factor visually evident. However, despite these advances, existing studies primarily focus on ordered periodic structures or isolated demonstrations, whereas systematic and accessible experimental approaches for illustrating diffraction from disordered and correlated ensembles – particularly in combination with quantitative analysis of fabricated masks produced by laser printing – remain insufficiently developed for instructional use.

The purpose of the study. The purpose of this study is to develop and present an integrated method combining printed binary masks with numerical simulation for instructional visualization of Fraunhofer diffraction, taking into account printer resolution, pixelation effects, and fabrication-induced variations.

This framework enables systematic exploration of diffraction patterns across ordered gratings, random Poisson distributions, Poisson Disk Sampling distributions, and hyperuniform ensembles (Torquato & Stillinger, 2003; Torquato, 2018). Each ensemble produces a distinctive far-field “fingerprint,” and comparison between experiment and simulation is restricted to geometry-based descriptors of the diffraction pattern. These include the radial positions of intensity extrema in ring-like structures and the inter-spot distances in discrete patterns, without using absolute or relative intensity values.

By integrating numerical simulation with experimental visualizations using digital printing and accessible laser optics, this approach provides students with an engaging and effective means to visualize and explore Fourier optics, concepts of statistical physics, and the relationship between real and reciprocal space.

METHODS OF THE RESEARCH

Generation of microstructures. The microstructures were programmatically generated using Python. All masks were designed for printing on OHP laser-printer transparency film (A4 format) at a resolution of 1200 × 1200 dpi using a Brother HL-L2400DW printer. The physical dimensions of structural elements were specified in micrometers and converted to pixels within the Python scripts according to the relation (1).

$$1 \text{ px} = \frac{1 \text{ inch}}{1200 \text{ dpi}} \approx 21.17 \text{ } \mu\text{m}. \quad (1)$$

The minimum practical feature size was chosen to be 80–84 μm , corresponding to approximately 4 pixels according to equation (1). This size ensures the formation of fully opaque regions with adequate and uniform toner thickness.

All masks were physically printed on premium 100 μm -thick laser-printer transparency film using the HQ1200 / Graphics mode.

Printing considerations. Microscopic inspection of the printed masks reveals several non-idealities inherent to laser-printing-based fabrication, including edge roughness, limited lateral toner spreading, and local distortions in regions with closely spaced elements. Similar fabrication-induced feature broadening and partial merging effects have been reported in studies of laser-printed photomasks and toner-based pattern transfer (Easley et al., 2009; Ghosh et al., 2019).

From an educational perspective, such fabrication-induced variations illustrate the interplay between theoretical design, numerical simulation, and experimental implementation, highlighting how practical constraints affect observed optical diffraction patterns. In each visualization, these detected defects are considered, and their influence on the resulting diffraction pattern is systematically analyzed to demonstrate how deviations from ideal geometry affect both periodic and disordered ensembles.

Experimental setup and Fraunhofer conditions. In the experiment, a standard semiconductor laser pointer ($\lambda = 0.532 \text{ } \mu\text{m}$, output power $< 5 \text{ mW}$, Class II) was employed. Basic laser-safety precautions appropriate for Class II devices were observed throughout the setup.

The laser beam was directed perpendicular to the surface of the transparency film carrying the printed microstructure. The distance from the laser pointer to the film was $h = 0.20 \text{ m}$. The diffraction pattern was observed on a screen placed at a distance $z = 6.50 \text{ m}$ from the mask, a separation that simultaneously satisfies two independent Fraunhofer-condition criteria.

The first condition governs the applicability of the Fraunhofer approximation and is determined by the effective lateral extent of the illuminated region on the mask (Born & Wolf, 1999; Guenther, 2020; Hecht, 2017). The standard criterion is expressed as

$$z \gg R^2/4\pi\lambda, \quad (2)$$

where R is the radius of the illuminated region on the mask, defined as half the transverse dimension of the microstructured film section within which the laser beam produces significant illumination.

For the present experimental visualization, the radius of the illuminated region was $R = 1 \text{ mm}$, yielding the requirement $z \gg 0.15 \text{ m}$ according to equation (2). A more rigorous estimate, based on the maximum quadratic phase shift, gives $z \gg \pi R^2/\lambda \approx 5.9 \text{ m}$ (Rayleigh range). The chosen screen distance of $z = 6.5 \text{ m}$ comfortably exceeds this stricter threshold, fully satisfying the Fraunhofer (far-field) condition and ensuring sharp, well-defined diffraction patterns.

The second condition pertains to the characteristic size of an individual opaque element (line, disk, or square). For the diffraction pattern of a single obstacle to conform rigorously to the classical Fraunhofer expressions, the linear dimensions of the element are typically chosen to substantially exceed the wavelength (Bertero et al., 1985). In the present structures, this dimension ranges from 80 to 84 μm – more than 150 times the wavelength of the radiation ($\lambda = 0.532 \text{ } \mu\text{m}$). This substantial ratio ensures excellent reproducibility of the single-element form factor and validates the quantitative interpretation of the observed diffraction patterns.

Image acquisition and processing. Diffraction patterns were recorded using a Nikon D850 digital single-lens reflex camera equipped with a Nikon AF-S VR Micro-NIKKOR 105 mm f/2.8G IF-ED lens. The camera was mounted on a tripod to eliminate motion blur during long exposures under low-light conditions.

Experimental images were converted to grayscale and calibrated in spatial coordinates using a known pixel-to-length ratio. For visualization and comparison with simulations, intensity values were globally normalized by their maximum value, yielding dimensionless intensities in the range $[0, 1]$.

Optical micrographs of the fabricated masks were acquired using a Leica M205 stereomicroscope. These micrographs were further analyzed using ImageJ software (Schneider et al., 2012) to measure geometric parameters, including equivalent element diameters (based on area), shape (aspect ratios), halo size, lattice periods in periodic arrays, and characteristic distances such as the minimum center-to-center spacing in disordered (e.g., Poisson Disk Sampling) ensembles. These measurements provided quantitative information on fabrication-induced variations, enabling comparison with the nominal designed values and supporting interpretation of the corresponding diffraction patterns.

Numerical simulation. Diffraction patterns were numerically simulated using the two-dimensional fast Fourier transform (2D FFT) method on a uniform grid of 4096×4096 pixels, which balances spatial resolution and computational efficiency. The chosen discretization provides 45–69 grid points across each element diameter, ensuring accurate representation of shapes and relative positions for all configurations, including one- and two-dimensional gratings, centered and primitive unit cells, hexagonal and honeycomb lattices, as well as random (uncorrelated) and hyperuniform ensembles.

All masks were generated as binary images representing opaque elements on a transparent background. The physical printed masks have coarser resolution (~ 4 pixels per element) with widened and irregular edges, which are not fully captured in the numerical model. In the simulation, a slight Gaussian smoothing ($\sigma \approx 1.5$ pixels of the computational grid) was applied to the element boundaries solely to avoid unrealistically sharp edges introduced by the discrete numerical grid. This smoothing does not alter the nominal element size or the overall lattice geometry, but facilitates a more stable and visually realistic representation of diffraction features. Measured fabrication-induced variations, such as size fluctuations, edge roughness, and spacing deviations identified via ImageJ analysis, were generally taken into account qualitatively in interpreting the simulated diffraction patterns; in cases where these variations noticeably affected the pattern, the experimentally measured geometries were used directly in the numerical simulation.

The illumination was simulated by a Gaussian beam with a wavelength of $\lambda = 0.532 \text{ } \mu\text{m}$, whose intensity distribution in the aperture plane is described by equation (3), which is equivalent to the form presented in (Siegman, 1986).

$$I_{beam}(r) = e^{-\frac{2r^2}{\omega_0^2}}, \tag{3}$$

where r is the distance from the beam center, $\omega_0 = 1 \text{ mm}$ is the beam waist radius (defined at the $1/e^2$ intensity level), corresponding to the experimentally used illuminated region.

The resulting complex field in the mask plane was propagated to the far field using a 2D FFT, yielding the Fraunhofer diffraction pattern that can be directly compared with experimental observations.

All intensity maps are presented in normalized form for visualization due to the high dynamic range of both experimental and simulated data. Experimental images are normalized with respect to the maximum recorded intensity, while simulated intensity distributions are given in normalized units.

All simulated diffraction patterns of periodic structures (e.g., gratings) are shown using a linear intensity scale with optional saturation, unless otherwise stated. For ring-like diffraction patterns (e.g., Airy-like or disorder-induced circular patterns), nonlinear tone mapping is applied only to simulated images for visualization purposes to enhance weak diffraction features, such as higher-order rings. These processing steps preserve the spatial structure of the diffraction patterns and do not affect the positions, symmetry, or locations of intensity maxima; all such cases are explicitly indicated in the corresponding figure captions.

Comparison between experimental diffraction patterns and numerical simulations is performed primarily based on spatial characteristics (positions and radii of maxima and rings), since the possible nonlinear response of the imaging system (CMOS camera, Nikon D850), limited dynamic range, and variations in exposure conditions prevent reliable direct comparison of absolute intensities. The main validation of the fabricated masks was performed using optical microscopy and quantitative ImageJ analysis.

All data, including experimental diffraction photographs, optical microscopy images of fabricated masks, numerical simulations, Python scripts for data processing and visualization, and PNG files of masks used for printing, are available in an open-access repository (Voronkin & Lushchin, 2026).

RESULTS OF RESEARCH

1. Fraunhofer diffraction on a one-dimensional grating. Fraunhofer diffraction on a one-dimensional grating is considered. As a first experimental visualization, diffraction from a one-dimensional amplitude grating consisting of vertical opaque stripes is presented. The grating was first designed as a digital amplitude mask and subsequently fabricated by laser printing on a transparent film. The structure is characterized by an opaque stripe width $a = 84 \text{ }\mu\text{m}$ (≈ 4 pixels), grating period $d = 252 \text{ }\mu\text{m}$ (≈ 12 pixels), and a calculated filling factor $\eta \approx 0.33$.

In practice, the printed grating exhibits slight imperfections: the effective stripe width varies due to the granular toner structure, edge roughness, and local spreading. Within the analyzed area of approximately $2.9 \times 10^6 \text{ }\mu\text{m}^2$, six opaque vertical stripes were identified. ImageJ analysis (see Appendix A, Figure A1a) shows that:

- Average period $256.8 \pm 6.8 \text{ }\mu\text{m}$ (nominal $252 \text{ }\mu\text{m}$, relative deviation $+1.9 \%$);
- Stripe width $99.6 \pm 17.0 \text{ }\mu\text{m}$ (nominal $84 \text{ }\mu\text{m}$, relative deviation $+18.6 \%$);
- filling factor $\eta \approx 0.39$.

The relatively large uncertainty in the stripe width arises from irregular and wavy boundaries, accompanied by a diffuse halo, with the width varying between 5 and $11 \text{ }\mu\text{m}$ across different regions, caused by inhomogeneous toner deposition. As a result, the stripe width should be understood as an effective value, since the exact position of the edge depends on the chosen intensity threshold.

Under normal laser illumination, a classical diffraction pattern consisting of a central maximum and symmetrically spaced higher-order maxima is observed. However, deviations in the visibility and relative prominence of diffraction orders are observed qualitatively when compared with the idealized model, while no quantitative intensity comparison is performed.

Figure 1 compares the experimental diffraction pattern (A) with the numerical simulation for the nominal grating geometry (B).

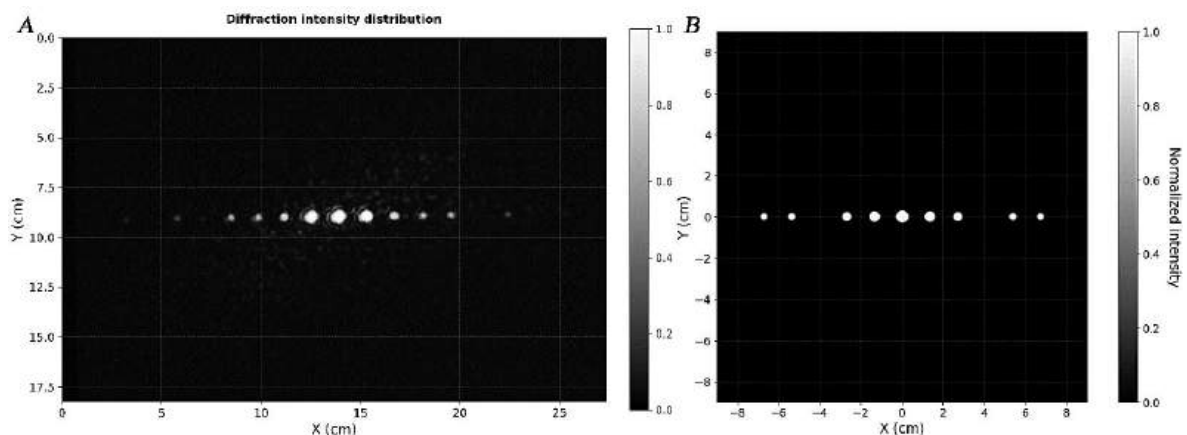


Fig. 1. Diffraction pattern obtained for a one-dimensional amplitude vertical grating: A – experimental diffraction pattern for the printed grating; B – numerical simulation for the nominal grating geometry ($d = 252 \text{ }\mu\text{m}$, $a = 84 \text{ }\mu\text{m}$). The simulation is shown using a linear intensity scale with normalization and a display-only intensity clipping threshold $I_{sat} = 0.002$

Source: author's own work

An additional simulation using experimentally determined effective parameters is presented in Figure 2. This allows direct assessment of the influence of fabrication induced deviations.

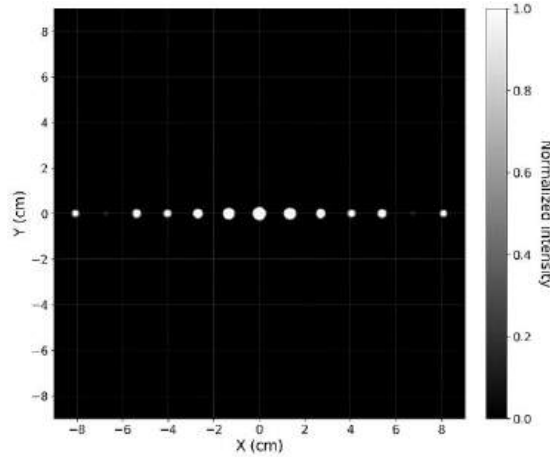


Fig. 2. Numerical simulation of diffraction from the same grating using experimentally determined effective parameters ($d \approx 257 \mu\text{m}$, $a \approx 100 \mu\text{m}$). Linear normalization and display-only clipping ($I_{\text{sat}} = 0.002$) were applied following the same procedure as in Figure 1

Source: author's own work

For the nominal grating geometry, the ratio $d/a = 3$ satisfies the condition for missing diffraction orders, whereby the maxima of the grating interference function coincide with the zeros of the single-slit diffraction envelope, resulting in the suppression of every third diffraction order. In the experimental pattern, the third diffraction order is partially restored due to effective stripe broadening and local edge variations, which reduce the ideal suppression predicted for a uniform grating.

In the experimental pattern, however, the ratio $d/a \approx 2.58$ deviates from this condition. As a result, exact cancellation no longer occurs, and the missing orders are replaced by strongly attenuated diffraction maxima. The third-order maximum is partially restored due to effective stripe broadening and local edge variations.

The increased filling factor ($\eta \approx 0.39$) leads to a narrowing of the diffraction envelope, causing enhanced suppression of higher diffraction orders. In particular, the fifth-order maximum is expected to be strongly attenuated, as it lies close to the second minimum of the envelope function.

The following subsections consider structures composed of isolated elements, represented as opaque disks. These elements serve as simplified models of discrete scatterers or particle projections. Such a representation enables a direct correspondence between the real-space arrangement of elements and the resulting diffraction pattern, providing a consistent framework for both numerical simulations and experimental visualizations of spatial correlations.

2. Fraunhofer diffraction by a two-dimensional periodic grating formed by a regular array of opaque disks. In this subsection, we consider Fraunhofer diffraction from a two-dimensional amplitude grating consisting of a square array of opaque disks. The structure was first designed as a digital amplitude mask, comprising disks of diameter $D = 84 \mu\text{m}$ (4 pixels at 1200 dpi), arranged on a square lattice with period $d_x = d_y = d = 169 \mu\text{m}$ (8 pixels). The physical mask was then fabricated by laser printing on a transparent film.

For a periodic array of identical objects, the disk shape defines the envelope of the diffraction pattern, while the lattice periodicity determines the positions of the maxima. In the small-angle approximation, the coordinates of the maxima on the screen located at a distance z from the mask with the diffraction grating are given by the expressions:

$$x_{m,n} \approx z \frac{m\lambda}{d_x}, \quad y_{m,n} \approx z \frac{n\lambda}{d_y}. \quad (4)$$

For a square grating ($d_x = d_y = d$), the diffraction pattern consists of a regular two-dimensional grid of bright spots, corresponding to the index pairs (m, n) . The central maximum corresponds to the $(0, 0)$ order; the nearest maxima to $(\pm 1, 0)$ and $(0, \pm 1)$; and the diagonal ones to $(\pm 1, \pm 1)$. This structure is a direct representation of the reciprocal lattice.

From the above expressions, a simple relationship follows between the grating period and the distance between adjacent diffraction maxima relative to the center:

$$\Delta x_1 = x_{1,0} \approx \frac{z\lambda}{d_x}, \quad \Delta y_1 = y_{0,1} \approx \frac{z\lambda}{d_y}. \quad (5)$$

To improve experimental accuracy, the lattice period can be estimated by averaging values obtained from multiple diffraction orders:

$$\overline{d_x} \approx \left\langle z \frac{m\lambda}{x_{m,0}} \right\rangle_{m=1,2}, \quad \overline{d_y} \approx \left\langle z \frac{n\lambda}{y_{0,n}} \right\rangle_{n=1,2}. \quad (6)$$

This approach allows for reducing the impact of experimental errors and enhances the robustness of the result.

A quantitative characterization of the fabricated mask (see Appendix A, Figure A1b) was performed using ImageJ. The spatial calibration was based on a $250 \mu\text{m}$ reference scale. Within an analyzed area of approximately $2.9 \times 10^6 \mu\text{m}^2$, 93 disks were identified. The measured parameters are:

- vertical period: $177.4 \pm 7.4 \mu\text{m}$ (nominal $169 \mu\text{m}$, relative deviation +4.97 %);

- horizontal period: $176.8 \pm 18.7 \mu\text{m}$ (nominal $169 \mu\text{m}$, relative deviation $+4.62\%$);
- equivalent disk diameter: $D = 83.3 \pm 36.3 \mu\text{m}$ (nominal $84 \mu\text{m}$);
- aspect ratio $AR = 1.3 \pm 0.3$.

The disk diameter was defined via the equivalent-area method. The relatively large uncertainty is attributed to irregular disk boundaries, including edge roughness and a diffuse halo caused by non-uniform toner deposition.

Figure 3 compares the experimentally observed diffraction pattern with a numerical simulation based on the measured parameters. Despite minor deviations in disk shape and a $\sim 5\%$ increase in the lattice period, the maxima positions agree well with theoretical predictions, whereas intensity distributions are not compared quantitatively due to experimental and visualization limitations.

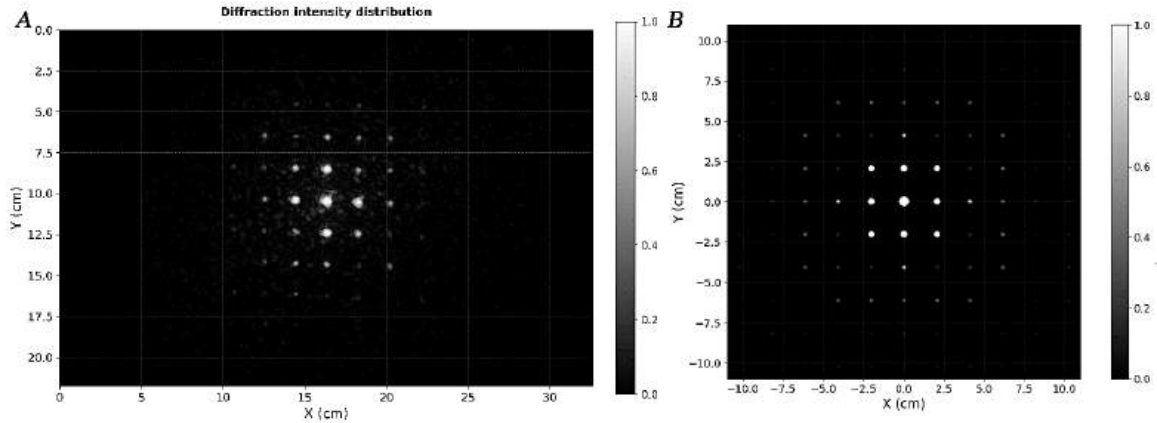


Fig. 3. Comparison of diffraction patterns: A – experimental pattern on the screen; B – numerical simulation of Fraunhofer diffraction ($D = 84 \mu\text{m}$, $d = 169 \mu\text{m}$). Linear normalization and display-only clipping ($I_{\text{sat}} = 0.002$) were applied only to the simulated image, following the same procedure as in Figure 1
 Source: author's own work

From a pedagogical perspective, this example highlights the separation between the roles of lattice periodicity and single-element geometry in diffraction: the positions of the maxima are determined by the global periodic structure, whereas their intensities are influenced by the shape of individual elements.

3. Fraunhofer diffraction on a periodic square grating with additional central disks. In this visualization, a modified two-dimensional amplitude structure is presented, corresponding to a square periodic grating with additional elements located at the centers of the unit cells. Such a structure corresponds to a centered square lattice (c-centered square lattice). It can be represented as the superposition of two interpenetrating square sublattices: sublattice A, consisting of disks positioned at the nodes of a square grid, and sublattice B, comprising identical disks but shifted by the vector $\Delta = (d/2, d/2)$.

In the digital design, the base structure consists of opaque disks with a diameter of $D = 80 \mu\text{m}$ (≈ 4 pixels), positioned at the nodes of a square grid with a period of $d = 300 \mu\text{m}$ (≈ 14 pixels). An additional disk of the same diameter is placed at the center of each unit cell, shifted by the vector Δ .

The period of the primary sublattice A determines the spacing between adjacent maxima on the screen: $\Delta x = \Delta y \approx 1.15 \text{ cm}$ (see equation (5)). Sublattice B produces a sparser grid of maxima, yielding $\Delta x = \Delta y \approx 2.31 \text{ cm}$. The offset of sublattice B relative to A gives rise to a structure factor – a phase factor that modulates the intensity of the diffraction orders.

Although the diffraction pattern is convenient for visual comparison in (x, y) coordinates, a rigorous analysis of all diffraction orders requires the use of reciprocal lattice vectors \mathbf{b}_1 and \mathbf{b}_2 .

Each maximum on the screen corresponds to a reciprocal lattice vector \mathbf{G}_{mn} :

$$\mathbf{G}_{mn} = m\mathbf{b}_1 + n\mathbf{b}_2, m, n \in \mathbb{Z} \quad (7)$$

where \mathbf{b}_1 is the first basis vector of the reciprocal lattice along the x -axis, \mathbf{b}_2 is the second basis vector of the reciprocal lattice along the y -axis.

These indices (m, n) determine whether a given diffraction order will be bright or suppressed in accordance with the structure factor of the centered lattice. The introduction of the reciprocal lattice provides a natural framework for describing the alternation of allowed and forbidden maxima (the condition requiring even $m + n$) and for correctly interpreting the observed pattern, including the weak intermediate orders and their phase relationships.

The phase factor induced by the shift vector Δ is given by

$$e^{i\mathbf{G}_{mn} \cdot \Delta} = e^{i\pi(m+n)}. \quad (8)$$

Consequently, the structure factor of the centered lattice is then:

$$S(m, n) = 1 + e^{i\pi(m+n)}, \quad (9)$$

which yields bright maxima ($S = 2$) when $m + n$ is even and suppressed diffraction orders ($S = 0$) when $m + n$ is odd.

It is precisely the alternation of allowed and forbidden diffraction orders that gives rise to the characteristic appearance of the diffraction pattern. In practice, perfect suppression of odd orders is not observed experimentally, which is attributable to residual intensity from nearly suppressed orders, side lobes, the finite number of elements in the mask, as well as fabrication-specific factors.

Direct inspection of the printed mask (see Appendix A, Figure A1c) reveals deviations from the nominal geometry. ImageJ-based analysis identified 48 disks within an area of $2.9 \times 10^6 \mu\text{m}^2$. The measured parameters are:

- horizontal period $315.6 \pm 3.5 \mu\text{m}$ (nominal $300 \mu\text{m}$, relative deviation $+5.2 \%$);
- vertical period $330.0 \pm 21.3 \mu\text{m}$ (nominal $300 \mu\text{m}$, relative deviation $+10.0 \%$);
- aspect ratio $AR = 1.1 \pm 0.1$;
- disk diameter $D = 151.0 \pm 7.0 \mu\text{m}$ (nominal $80 \mu\text{m}$, relative deviation $+88.8 \%$).

Unlike the smaller-period structures, this configuration exhibits well-defined disk edges without pronounced halo formation; however, the effective disk diameter is significantly increased. This unusually large deviation is observed only for this mask and is likely related to printer-specific rasterization or exposure algorithms at larger feature spacing ($>300 \mu\text{m}$), in addition to toner spreading and edge broadening effects.

Figure 4 compares the experimental diffraction pattern with the numerical simulation based on nominal parameters.

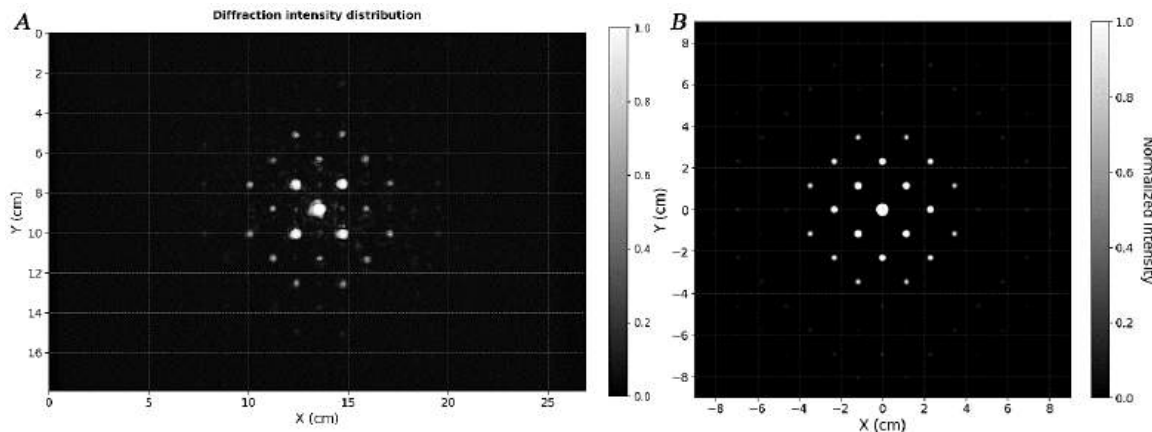


Fig. 4. Comparison of diffraction patterns: A – experimental pattern on the screen; B – numerical simulation ($D = 80 \mu\text{m}$, $d = 300 \mu\text{m}$). Linear normalization and display-only clipping ($I_{\text{sat}} = 0.002$) were applied only to the simulated image, following the same procedure as in Figure 1

Source: author's own work

The experimental pattern exhibits weak, barely visible residual odd-order maxima near the central region, which are absent in the ideal case. These arise from incomplete destructive interference due to deviations from perfect lattice symmetry.

Several factors contribute to this effect. First, anisotropy in the lattice periods ($315.6 \mu\text{m}$ vs $330.0 \mu\text{m}$) distorts the reciprocal lattice, leading to imperfect phase matching for destructive interference. Second, measured positional deviations of disk centers (on the order of $\pm 3.5 \mu\text{m}$ in x and $\pm 21.3 \mu\text{m}$ in y) further reduce the efficiency of suppression of these orders.

Students can directly observe how deviations from ideal symmetry, including size variations and lattice anisotropy, affect interference conditions and lead to incomplete extinction of nominally forbidden orders. These disk position deviations can arise from mechanical noise in film feeding, laser positioning accuracy, local toner deposition variations, or microscopic vibrations of the film. This provides another clear and accessible illustration of how real structural imperfections modify diffraction patterns, bridging the gap between idealized theoretical models and experimentally realizable structures.

4. Diffraction by a two-dimensional hexagonal grating of opaque disks. In this visualization, a two-dimensional structure composed of identical opaque circular disks arranged at the nodes of a hexagonal lattice is employed. Each disk in this lattice has six equivalent nearest neighbors, forming the classic triangular packing arrangement.

The structure was designed as a digital amplitude mask using the Python Imaging Library (PIL) and subsequently fabricated by laser printing on a transparent film. The disks in the design had a nominal diameter $D = 84 \mu\text{m}$ (≈ 4 pixels at 1200 dpi).

The grating parameters were selected by minimizing structural anisotropy. The algorithm scanned possible values of the horizontal period d_x (restricted to even pixel values to ensure integer row offsets) and computed the corresponding vertical period from the hexagonal relation $d_y = d_x\sqrt{3}/2$, rounded to the nearest integer number of pixels. Anisotropy was quantified as the difference between distances to horizontal and diagonal nearest neighbors.

The optimal configuration was found to be: horizontal period $d_x = 8$ pixel ($169 \mu\text{m}$), vertical period $d_y = 7$ pixel ($148 \mu\text{m}$), and an offset of 4 pixel ($84.5 \mu\text{m}$) for odd-numbered rows. This yields a quasi-hexagonal grating with a nearest-neighbor distance of approximately $169 \mu\text{m}$.

At the design stage, rounding of d_y introduces a residual anisotropy of $\approx 0.78 \%$, with nearest-neighbor distances ranging from 3.9 to 4.7 pixels and a lattice angle of 60.26° instead of the ideal 60° . However, the experimentally fabricated mask exhibits additional and more pronounced deviations arising from the printing process, which further distort the lattice geometry beyond this intrinsic discretization limit.

Figure 5 presents a comparison between the experimental diffraction pattern and the result of numerical simulation performed in Python.

For the numerical simulation, an ideal hexagonal lattice was used, with disk centers defined with floating-point precision (64-bit), avoiding pixel-grid rounding. The disk diameter was $D = 84 \mu\text{m}$, and the nearest-neighbor distance was $169 \mu\text{m}$. The vertical period was computed with machine precision, ensuring exact hexagonal symmetry.

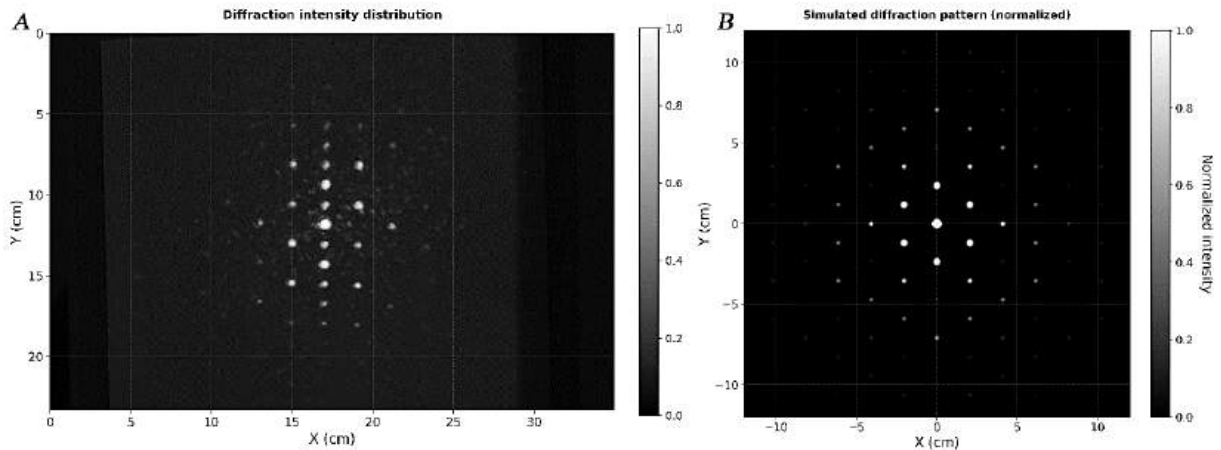


Fig. 5. Comparison of diffraction patterns: A – experimental pattern; B – numerical simulation of Fraunhofer diffraction for ideal grating geometry ($D = 84 \mu\text{m}$, nearest-neighbor spacing $a = 169 \mu\text{m}$). Linear normalization and display-only clipping ($I_{\text{sat}} = 0.002$) were applied only to the simulated image, following the same procedure as in Figure 1
 Source: author's own work

In the experimental diffraction pattern, the central vertical axis exhibits primary maxima with spacing $\Delta y \approx 2.5 \text{ cm}$ (Figure 5A). In addition, weaker secondary maxima appear at half-spacing $\Delta y/2 \approx 1.2 \text{ cm}$. These peaks are absent in the ideal simulation (Figure 5B), indicating a deviation from perfect hexagonal periodicity.

Quantitative analysis of the printed mask (see Appendix A, Figure A1d) using ImageJ on a representative region ($\approx 2.9 \times 10^6 \mu\text{m}^2$, 95 disks) reveals:

- $D = 91.0 \pm 9.3 \mu\text{m}$ (nominal $84 \mu\text{m}$, relative deviation +8.3 %), halo width $\approx 8\text{--}10 \mu\text{m}$;
- $\text{AR} = 1.1 \pm 0.1$;
- $d_x = 177.4 \pm 15.1 \mu\text{m}$ (nominal $169 \mu\text{m}$, relative deviation +5.0 %);
- $d_y = 167.8 \pm 18.4 \mu\text{m}$ (nominal $148 \mu\text{m}$, relative deviation +13.4 %);
- nearest-neighbor distance $a = 179.0 \pm 13.5 \mu\text{m}$ (nominal $169 \mu\text{m}$, relative deviation +5.9 %).

The ratio $d_x/d_y \approx 1.06$ deviates from the ideal geometric relation for a hexagonal lattice $2/\sqrt{3} \approx 1.155$, indicating a distortion of lattice symmetry.

However, a more detailed analysis reveals that this is not a simple uniform distortion. The inter-row spacings exhibit locally alternating shorter ($\approx 154 \mu\text{m}$) and longer ($\approx 195 \mu\text{m}$) values, forming a periodic short–long modulation. The average spacing ($d_{y,\text{eff}} \approx 174.5 \mu\text{m}$) is close to the measured d_y , but the alternation breaks translational symmetry along the vertical direction and introduces an additional spatial frequency corresponding to a doubled period.

In reciprocal space, this modulation produces additional diffraction maxima at half the primary spacing ($\Delta y/2 \approx \lambda \cdot z / (2 \cdot d_{y,\text{eff}}) \approx 0.99 \text{ cm}$).

Figure 6 shows a numerical simulation incorporating this vertical modulation ($d_x \approx 178 \mu\text{m}$, $d_{y,\text{short}} \approx 154 \mu\text{m}$, $d_{y,\text{long}} \approx 195 \mu\text{m}$). Simulation also predicts a weaker secondary component at approximately 0.99 cm , in addition to the $\Delta y/2 \approx 1.2 \text{ cm}$ peak. However, this feature is not clearly resolved in the experimental diffraction pattern, where only the 1.2 cm component is consistently observed. This suggests that the real fabrication-induced modulation deviates from an ideal periodic perturbation, likely exhibiting a non-ideal modulation profile and local structural variations that selectively enhance specific components while suppressing others.

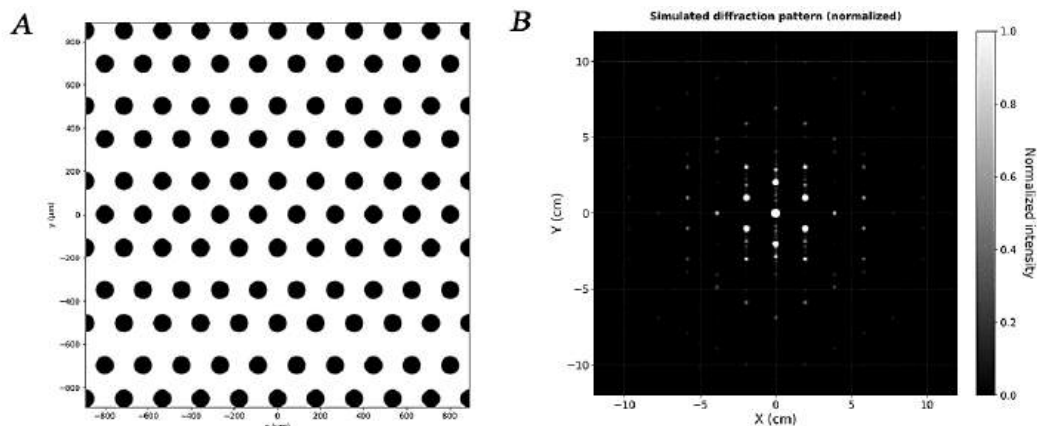


Fig. 6. Numerical simulation of Fraunhofer diffraction for a hexagonal disk array with a modulated vertical period: A – digital amplitude mask with alternating inter-row spacing ($D = 84 \mu\text{m}$, $d_x = 178 \mu\text{m}$, $d_{y,\text{short}} = 154 \mu\text{m}$, $d_{y,\text{long}} = 195 \mu\text{m}$); B – corresponding simulated diffraction pattern. Linear normalization and display-only clipping ($I_{\text{sat}} = 0.002$) were applied only to the simulated image, following the same procedure as in Figure 1
 Source: author's own work

These results demonstrate that the observed anomalies originate primarily from a systematic vertical modulation of the lattice (likely a printing-induced positioning artifact or the printer's internal rasterization algorithm), rather than from random size variations or uniform lattice distortion. From a pedagogical perspective, this example highlights how subtle real-space periodic modulations give rise to additional features in reciprocal space, providing a clear link between fabrication imperfections and diffraction patterns.

5. Diffraction by a two-dimensional honeycomb grating. The honeycomb lattice is a two-dimensional periodic structure with a two-atom basis, composed of two mutually displaced sublattices A and B. Each sublattice individually forms a triangular lattice; however, their relative offset results in each site having exactly three nearest neighbors. This geometry forms a network of regular hexagons and is characteristic of important physical systems such as graphene.

The structure was first designed as a digital amplitude mask and subsequently fabricated by laser printing on a transparent film. The disk positions were generated programmatically based on hexagonal geometry. The construction algorithm included:

- Generation of a grid of hexagon centers with a horizontal period of $d_x = 3a/2 = 253.5 \mu\text{m}$ (spacing between adjacent columns of centers) and a vertical period of $d_y = a\sqrt{3} \approx 292.7 \mu\text{m}$ (spacing between centers within the same column).
- Downward vertical offset of every odd-numbered column of centers by $d_y/2 \approx 146.4 \mu\text{m}$ to achieve hexagonal packing of the hexagon centers.
- Placement of six opaque disks of diameter $D = 84 \mu\text{m}$ at the vertices of each hexagon, located at a distance $a = 169 \mu\text{m}$ from the hexagon center and at angular positions $0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ,$ and 300° .

The coordinates of the disk centers were computed with floating-point precision and subsequently rounded to the nearest pixel at 1200 dpi resolution. At this resolution, the disk diameter corresponds to approximately 4 pixels, while the grating parameter $a \approx 8$ pixels. The rounding error for the center coordinates is $\pm 10.6 \mu\text{m}$ (half a pixel), resulting in a relative error of approximately 6 % of the disk diameter and approximately 3 % of the grating parameter a .

Each disk belongs to three adjacent hexagons, establishing a honeycomb topology with three nearest neighbors per site at a distance a . The centers of the hexagons remain empty (transparent).

Figure 7 presents a comparison between the experimental diffraction pattern and the result of numerical simulation for ideal honeycomb grating geometry.

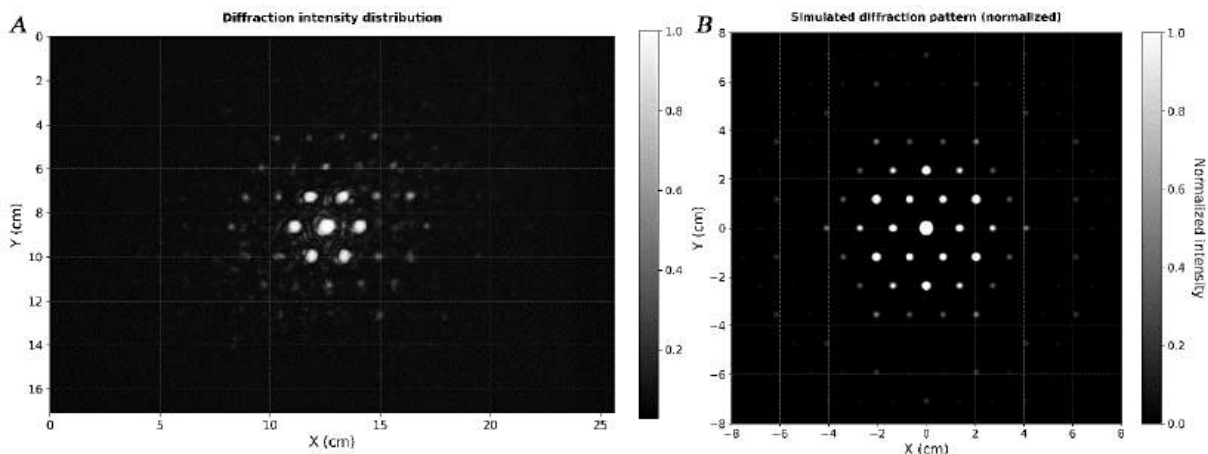


Fig. 7. Diffraction pattern of a honeycomb grating: A – experimental picture on the screen; B – numerical simulation of diffraction for ideal grating geometry ($D = 84 \mu\text{m}$, $a = 169 \mu\text{m}$). Linear normalization and display-only clipping ($I_{\text{sat}} = 0.002$) were applied only to the simulated image, following the same procedure as in Figure 1

Source: author's own work

The simulated diffraction pattern (see Figure 7B) is consistent with the experimental result (Figure 7A) in the positions of the diffraction maxima. The pattern exhibits primary bright peaks arranged in a regular hexagonal lattice with inter-peak spacings of $\Delta x \approx 1.36 \text{ cm}$ (horizontal) and $\Delta y \approx 2.37 \text{ cm}$ (vertical). The corresponding experimentally measured values are $\Delta x \approx 1.47 \text{ cm}$ and $\Delta y \approx 2.76 \text{ cm}$, indicating a systematic increase in the effective lattice spacing observed in the experimental pattern. In addition to the principal diffraction peaks, the experimental image reveals speckle noise (Dainty, 1984) arising from amplitude and phase fluctuations of the incident laser beam.

The real geometry of the fabricated mask was analyzed using optical microscopy (Appendix A, Figure A1e) and ImageJ. Accurate determination of disk diameters is complicated by the presence of local bridging (“connective bridges”) between adjacent disks due to toner spreading, leading to partial thickening and extended opaque regions. As a result, many areas form interconnected structures spanning several disks (typically 2–4), while preserving the overall honeycomb topology.

The characteristic size of opaque regions associated with lattice sites is $D = 120.0 \pm 19.6 \mu\text{m}$ (+43 % \pm 23 % relative to the nominal value of $84 \mu\text{m}$).

Thick interconnections between neighboring features prevented reliable automated detection; the nearest-neighbor distance was therefore measured manually. The nearest-neighbor distance (lattice parameter a), measured over 18 pairs in three hexagonal cells, is $a = 182.1 \pm 21.8 \mu\text{m}$, corresponding to a deviation of +7.8 % from the nominal value and a relative uncertainty of about 12 %.

Despite these fabrication-induced distortions, the structure retains long-range order, albeit in a weakened form, as evidenced by the clear hexagonal symmetry of the diffraction pattern. The primary diffraction maxima positions remain largely unchanged, governed by the average lattice periodicity, while local geometric distortions primarily affect intensity and peak sharpness.

6. Fraunhofer diffraction by a random array of disks (Poisson point process). In this subsection, we present an experimental visualization of Fraunhofer diffraction produced by an amplitude mask consisting of identical opaque disks whose centers were first digitally generated according to a Poisson point process (PPP) (Kingman, 1992). The designed mask contained disks of nominal diameter $D = 84 \mu\text{m}$, distributed over an active area of about $183 \times 254 \text{ mm}^2$, yielding a target filling factor of $\eta \approx 33 \%$.

The experimental mask was then fabricated by laser printing on A4-format transparent film. Optical microscopy and subsequent image analysis using ImageJ revealed that toner spreading and local merging produced deviations from the nominal design. Two representative regions were examined: (i) areas with relatively well-defined disks and (ii) regions exhibiting pronounced toner-related artefacts, typically occurring in zones of higher local disk density.

In the region with comparatively clean disk formation (Appendix A, Figure A1f), 22 individual disks were identified along with several aggregated features formed by partial overlap of neighboring disks. The average equivalent diameter of disks was $D = 109.5 \pm 13.6 \mu\text{m}$, corresponding to an increase of approximately 30.4 % relative to the nominal diameter. Elongated and oval-shaped structures were also observed, originating from the merging of closely spaced elements.

In contrast, in regions with higher disk density (Appendix A, Figure A1g), printing artefacts become dominant. The disks lose circular symmetry and exhibit irregular, jagged, and asymmetric shapes with blurred and partially discontinuous boundaries. A diffuse halo is observed around many features due to toner spreading, accompanied by randomly distributed fine particles (typically 5–10 μm in size). In such regions, the toner forms complex aggregated structures rather than well-defined individual disks. This behavior is attributed to non-uniform toner transfer and particle aggregation during the thermal fixation stage of laser printing, and it significantly alters the effective amplitude mask structure.

To interpret the experimental results, two numerical simulations of Fraunhofer diffraction were performed using a reduced computational domain. In both cases, 1390 disks were generated within an area of $5.0 \times 5.0 \text{ mm}^2$, with their centers distributed according to a Poisson point process.

In Scenario A, all disks were assigned the effective diameter $D = 109 \mu\text{m}$, corresponding to the experimentally measured value.

In Scenario B, the disk diameter was likewise set to $D = 109 \mu\text{m}$; however, additional fabrication-induced distortions were introduced to account for deviations from ideal geometry. Specifically, disk edges were randomly perturbed with a roughness of 15% of the radius and a phase distortion amplitude of 0.3 radians, applied in a random manner along the perimeter of each disk. In both scenarios, a Gaussian edge smoothing with $\sigma = 1.5$ pixels (on a 4096×4096 computational grid) was applied to model the finite resolution of the printing process.

A comparison between the experimental diffraction pattern and the numerical simulations is presented in Figure 8.

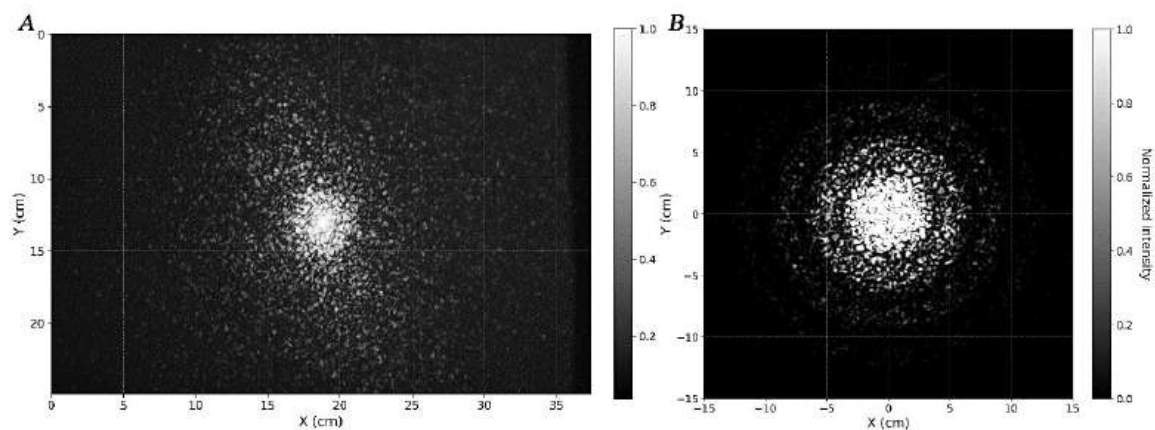


Fig. 8. Comparison of Fraunhofer diffraction patterns for a Poisson-distributed array of disks: A – experimental diffraction pattern; B – numerical simulation for monodisperse disks ($D = 109 \mu\text{m}$) with nonlinear tone mapping (exposure = 1.5, $\gamma = 1.5$) applied to enhance weak diffraction rings (for visualization only)

Source: author's own work

The experimental diffraction pattern (Figure 8A) is characterized by a pronounced central maximum. The first minimum of the diffraction envelope, expected at a radial distance of approximately $r_1 \approx 3.9 \text{ cm}$ (corresponding to an effective disk diameter of about $109 \mu\text{m}$), is only weakly discernible, and higher-order rings are largely suppressed. In contrast, the numerical simulation for monodisperse disks with $D = 109 \mu\text{m}$ (Figure 8B) exhibits a well-defined diffraction pattern, where not only the first minimum but also higher-order diffraction rings are clearly visible, reflecting the single-particle diffraction envelope expected for an ensemble of opaque disks with uncorrelated spatial positions, in accordance with the array theorem of statistical optics (Goodman, 1996; Singh, 2023).

When fabrication-induced distortions are incorporated (Figure 9), including irregular disk contours and random phase variations, the first minimum becomes barely discernible, and higher-order rings effectively disappear, bringing the simulated pattern into close agreement with the experimental observation. This comparison is qualitative and based on the visibility of structural features only.

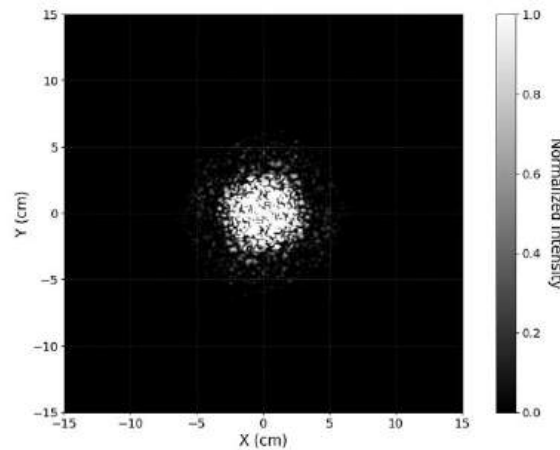


Fig. 9. Numerical simulation of Fraunhofer diffraction for a Poisson-distributed array of disks including fabrication-induced effects such as edge roughness, contour modulation, and random phase distortions ($D = 109 \mu\text{m}$). Nonlinear tone mapping was applied as described in Figure 8 for visualization purposes

Source: author's own work

Additional printing defects occurring in regions of overlapping disks, such as microbubbles and toner microparticles, further increase the heterogeneity of the effective transmission function, enhancing the superposition of non-identical contributions from individual mask elements. This leads to a strong suppression of the visibility of diffraction rings. Consequently, the experimental pattern is dominated by a central maximum surrounded by a diffuse, speckle-like halo.

In a teaching context, this example clearly illustrates how deviations from an idealized ensemble of uncorrelated disk positions – in particular overlap, irregular disk shapes, and local inhomogeneities – lead to a progressive loss of contrast in diffraction patterns, ultimately obscuring the features predicted by the idealized model.

7. Diffraction by disordered disk distributions with a minimal inter-disk distance (Poisson Disk Sampling). In this subsection, we present an experimental realization of a two-dimensional amplitude mask in which identical disks are distributed according to a Poisson disk sampling (PDS) scheme (Bridson, 2007). In contrast to a purely random (PPP) distribution, this configuration imposes a minimum center-to-center distance between disks, preventing clustering and large voids. As a result, the diffraction pattern becomes more regular.

The digital mask was designed with disks of nominal diameter $D = 84 \mu\text{m}$ and a minimum center-to-center distance $d_{\min} = 169 \mu\text{m}$, corresponding to a calculated filling factor of $\eta \approx 12.5\%$. The corresponding physical mask was fabricated by laser printing on a transparent A4 sheet with a resolution of 1200 dpi, including unprinted margin regions.

Microscopic analysis of the printed mask (Appendix A, Figure A1h) revealed significant deviations from the nominal design geometry. Within the analyzed area ($\sim 2.9 \times 10^6 \mu\text{m}^2$), 33 disks were identified, including two instances of merged neighboring disks, which were excluded from the statistical analysis. Around each disk, local inhomogeneities in toner density are observed, forming a diffuse halo of approximately $5\text{--}9 \mu\text{m}$ in width.

Using ImageJ, the average equivalent disk diameter was determined as $D = 117.6 \pm 12.1 \mu\text{m}$, which corresponds to an increase of approximately $40\% \pm 14\%$ relative to the nominal value of $84 \mu\text{m}$. A significant size dispersion is observed, indicating pronounced polydispersity of the disks. Deviations from circularity (aspect ratio $AR = 1.1 \pm 0.1$) have a comparatively minor effect.

In addition, the nearest-neighbor distances between disk centers were analyzed. The minimum measured value was $170.0 \mu\text{m}$, which differs from the nominal value $d_{\min} = 169 \mu\text{m}$ by less than 1%, confirming that the imposed spacing constraint is well preserved in the printed structure. The average nearest-neighbor distance was found to be $206.7 \pm 30.0 \mu\text{m}$.

The experimental Fraunhofer diffraction pattern, recorded on a screen, is shown in Figure 10A. The pattern is characterized by a pronounced central maximum with high circular symmetry and a clearly visible first diffraction ring. The radial position of the first minimum is consistent with the average effective disk diameter, as expected from Babinet's principle for complementary apertures. This behavior can be understood as follows: the observed intensity is interpreted as an effective (ensemble-averaged) superposition of diffraction patterns produced by disks of different diameters. Since the angular position of the first minimum scales approximately as $\theta \propto 1/D$, the experimentally observed size dispersion results primarily in a slight radial broadening of the minimum rather than a systematic shift of its mean position. In contrast, higher-order rings, which are more sensitive to diameter variations and phase differences, are strongly suppressed due to averaging over the size distribution. The fine-scale granular intensity background (speckle-like intensity fluctuations) observed in the diffraction pattern arises from the disordered PDS distribution, combined with structural imperfections and local printing inhomogeneities. Nevertheless, the overall shape of the central maximum is primarily governed by the average effective disk diameter across the ensemble.

It should be noted that the additional distortions introduced in subsection 3.6 – namely enhanced edge roughness and random phase modulation – were deliberately not applied in the simulations presented in this and subsequent subsections. In the case of a purely Poisson distribution with significant disk overlap, these effects are essential to reproduce the pronounced weakening of the diffraction ring structure observed experimentally. In contrast, when a minimum inter-disk distance is imposed, spatial correlations alone are sufficient to stabilize the diffraction pattern and preserve well-defined ring features. Moreover, as demonstrated in previous studies (Kathavate, 1945; Li et al., 2009), increasing the local disk density in such correlated arrangements can further enhance the contrast of diffraction rings.

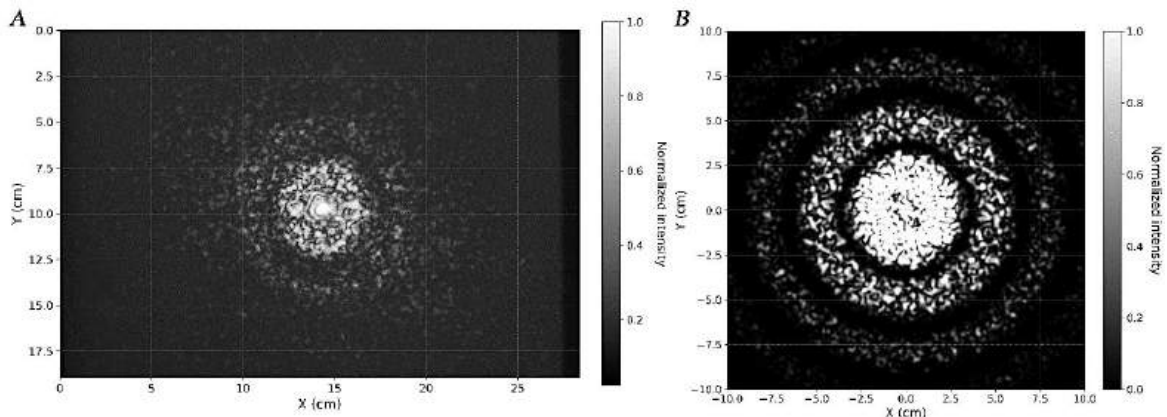


Fig. 10. Comparison of diffraction patterns: A – experimental pattern recorded on the screen; B – simulation of Fraunhofer diffraction for monodisperse disks ($D = 117 \mu\text{m}$, $d_{\text{min}} = 169 \mu\text{m}$). Nonlinear tone mapping was applied only to the simulation results using the same parameters as in Figure 8, for visualization purposes

Source: author's own work

A numerical simulation was performed using a PDS distribution with parameters corresponding to the experimentally measured average geometry (Figure 10B), while assuming a monodisperse disk ensemble ($D = 117 \mu\text{m}$, $d_{\text{min}} = 169 \mu\text{m}$, PDS, $\eta \approx 24\%$). Compared to the nominal disk diameter of $84 \mu\text{m}$, the increased effective size leads to a smaller radius of the first diffraction minimum ($r_1 \approx 3.6 \text{ cm}$), in agreement with the experimental observation ($r_1 \approx 3.5 \text{ cm}$).

An additional numerical simulation was performed incorporating disk size polydispersity consistent with the experimentally measured distribution. In this model, disk diameters were randomly sampled from a normal distribution with mean $D = 117 \mu\text{m}$ and standard deviation $\sigma = 12 \mu\text{m}$, while preserving the same PDS spatial arrangement.

The resulting diffraction pattern is shown in Figure 11. In contrast to the monodisperse case, where multiple diffraction rings are clearly visible, the inclusion of size polydispersity leads to a substantial suppression of higher-order rings. The diffraction pattern becomes dominated by a pronounced central maximum and a single broad first ring, in close agreement with the experimental observation.

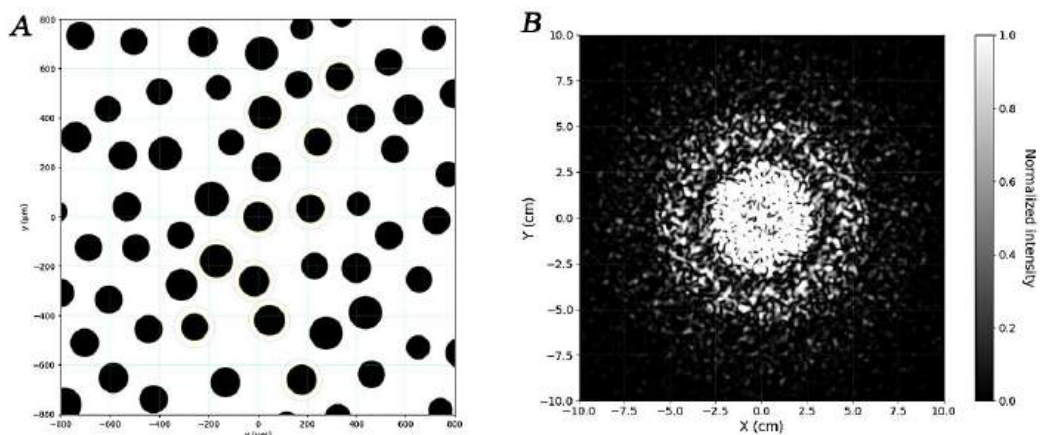


Fig. 11. Poisson Disk Sampling distribution with disk size polydispersity ($D = 117 \pm 12 \mu\text{m}$, $d_{\text{min}} = 169 \mu\text{m}$): A – amplitude mask; B – simulated Fraunhofer diffraction pattern. Nonlinear tone mapping was applied only to the simulation results using the same parameters as in Figure 8, for visualization purposes

Source: author's own work

The comparison demonstrates that disk size polydispersity is the dominant factor governing the reduction of ring visibility in the experimental diffraction pattern, whereas other imperfections (such as shape distortions and local toner inhomogeneities) play a secondary role.

From an educational perspective, this example clearly demonstrates how the interplay of minimal spacing, disk polydispersity, and local printing inhomogeneities affects the formation and visibility of diffraction features. It provides a concrete illustration of how ideal theoretical predictions are progressively modified under realistic experimental conditions. Students can explore these effects directly by varying disk spacing or simulating different levels of polydispersity and edge roughness, observing the resulting changes in the diffraction pattern. This hands-on approach reinforces the link between object geometry and Fraunhofer diffraction, highlighting the sensitivity of patterns to structural imperfections and making PDS masks a valuable tool for teaching fundamental wave optics concepts.

8. Diffraction by a disordered array of randomly oriented square elements (Poisson Disk Sampling). In this subsection, we present numerical simulation of Fraunhofer diffraction from a two-dimensional disordered structure composed of square opaque elements of fixed size. The centers of the squares are distributed using the Poisson Disk Sampling (PDS) method, which

enforces a minimum center-to-center distance and produces a spatially uniform pseudorandom arrangement without clustering or large voids. Each square is independently rotated by a random angle in the range 0° – 360° , resulting in an ensemble with completely uncorrelated orientations.

Due to practical limitations of laser printing – such as anisotropic toner spreading and orientation-dependent edge distortions – this configuration is considered here exclusively within numerical simulation.

A square aperture produces a diffraction pattern described by a separable sinc^2 function, which is inherently anisotropic. However, when a large number of such elements with random orientations are superimposed, the resulting intensity distribution becomes statistically isotropic. As a result, the far-field diffraction pattern exhibits concentric ring-like structures despite the absence of any long-range positional order (Khachatryan et al., 2025).

In the simulation, a $5.0 \times 5.0 \text{ mm}^2$ area contains 495 square elements with side length $a = 104 \mu\text{m}$ and a minimum center-to-center distance $d_{\min} = 180 \mu\text{m}$, corresponding to a filling factor of $\eta \approx 21.0\%$. The ratio $d_{\min}/a \approx 1.73$ ensures moderate packing density while preserving spatial uniformity.

Figure 12 shows generated mask and the corresponding diffraction pattern.

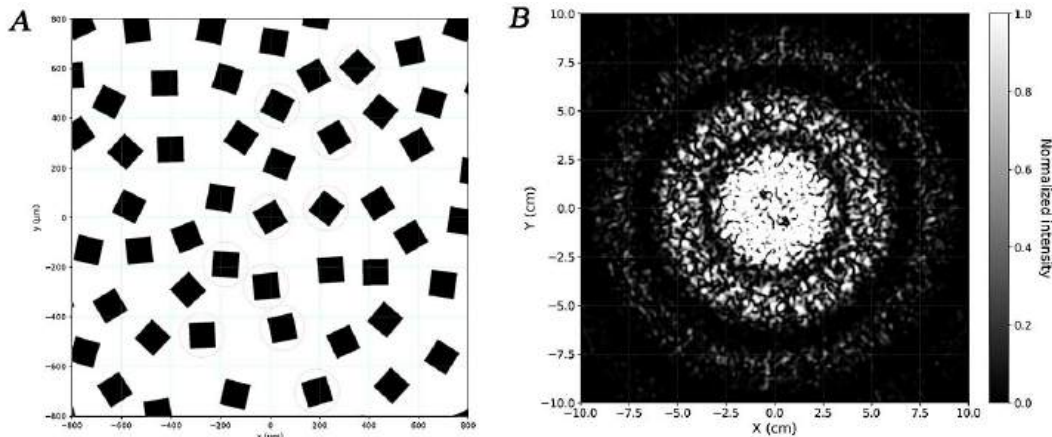


Fig. 12. Poisson Disk Sampling distribution of square elements ($a = 104 \mu\text{m}$, $d_{\min} = 180 \mu\text{m}$, $\eta \approx 21.0\%$):
A – amplitude mask; B – simulated Fraunhofer diffraction pattern. Nonlinear tone mapping was applied as described
in Figure 8 for visualization purposes

Source: author's own work

The characteristic radial scale of the diffraction pattern is governed by the size of individual elements. For a square aperture, the first zeros of the diffraction pattern occur at angles $\theta_x = \theta_y \approx \lambda/a$ along the principal axes. In the case of randomly oriented squares, these anisotropic features average out, giving rise to an effective circular minimum at a radial distance of approximately $r \approx 3.3 \text{ cm}$ for $a = 104 \mu\text{m}$, $\lambda = 0.532 \mu\text{m}$, and $z = 6.5 \text{ m}$.

This example demonstrates that even strongly anisotropic individual scatterers can produce an isotropic diffraction pattern when their orientations are randomized. It highlights the distinction between the form factor of individual elements and the statistical properties of their spatial distribution, providing a useful conceptual illustration for understanding diffraction in disordered systems. Students can extend this approach by simulating various element shapes – triangles, stars, rectangles – within similar pseudorandom distributions to explore how object geometry influences the resulting diffraction patterns.

9. Diffraction by a Poisson–Voronoi disk structure with suppressed long-wavelength fluctuations. In contrast to the classical PDS, which enforces a minimum distance between centers and thereby suppresses only short-wavelength density fluctuations, hyperuniform structures additionally suppress long-wavelength (low-frequency) fluctuations, enhancing statistical uniformity on large scales. To approximate such a state, a two-stage method is employed, combining initial PDS placement with modified Voronoi relaxation.

The initial configuration of disk centers was generated using the standard PDS ($D=84 \mu\text{m}$, $d_{\min}=169 \mu\text{m}$) and used as input for three iterations of Lloyd's relaxation (Lloyd, 1982). During relaxation, Voronoi cells (Du et al., 1999) intersecting the domain boundary (unbounded cells) were excluded from centroid recalculation, and any centroids falling outside the working area were discarded. We denote this combined procedure as Poisson–Voronoi Relaxation with Boundary Suppression (PV-RBS), ensuring that only interior points contribute to the redistribution, thereby enhancing local uniformity while suppressing boundary-induced artifacts. The digital mask was generated for an A4 transparent film with margins.

Direct inspection of the printed mask (Appendix A, Figure A1i, showing a representative fragment of the analyzed region) using ImageJ shows that within the analyzed area ($\sim 2.9 \times 10^6 \mu\text{m}^2$), 45 disks were identified. As in previous cases, a diffuse halo is observed along the disk boundaries. The measured aspect ratio $AR = 1.1 \pm 0.1$ indicates slight deviations from circularity, while the disk diameters are $D = 127.9 \pm 10.6 \mu\text{m}$ ($\approx 52\% \pm 13\%$ relative to the nominal $84 \mu\text{m}$), significantly exceeding the nominal value due to toner spreading. The minimum nearest-neighbor center-to-center distance was estimated as $a = 183.4 \pm 6.6 \mu\text{m}$ in the analyzed image.

Small variations in disk sizes introduced by the printing process cause the observed diffraction pattern to represent a superposition of slightly different diffraction patterns, reducing the sharpness and contrast of higher-order rings. However, a notable feature of this configuration is the presence of a narrow dark correlation-induced ring within the central maximum.

For diffraction simulation, a $5.0 \times 5.0 \text{ mm}^2$ mask was generated using the experimentally measured PV-RBS parameters ($D \approx 128 \text{ }\mu\text{m}$, $d_{\text{min}} \approx 183 \text{ }\mu\text{m}$).

Figure 13 shows a comparison of the experimental pattern on the screen and the numerical simulation of Fraunhofer diffraction. In the simulation, a monodisperse disk ensemble was assumed (i.e., without size polydispersity), using a uniform disk diameter $D \approx 128 \text{ }\mu\text{m}$. As shown in Figure 13B, the central diffraction maximum retains nearly ideal circular symmetry and, in terms of its characteristic size, is consistent with the diffraction envelope corresponding to an effective diameter close to the measured value. Modeling the disks as a monodisperse ensemble results in well-defined diffraction rings in the simulated pattern, together with a narrow dark ring within the central maximum.

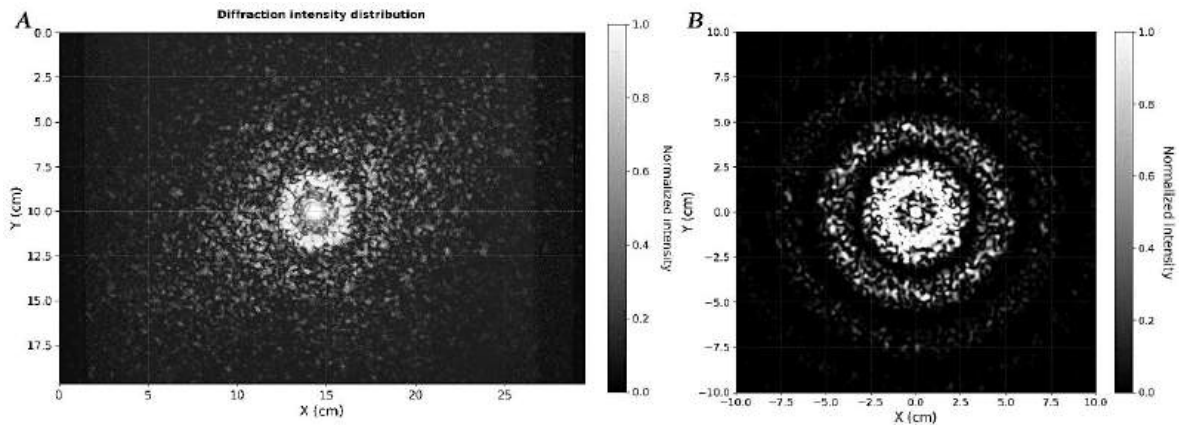


Fig. 13. Comparison of diffraction patterns: A – experimental pattern on the screen; B – numerical simulation of Fraunhofer diffraction using the experimentally measured parameters. Nonlinear tone mapping was applied only to the simulated image for visualization purposes, following the same procedure as in Figure 8 but with a different percentile threshold to enhance the visual contrast in the central region of the pattern

Source: author's own work

The narrow dark ring, extending from approximately 4 mm to 14 mm from the central maximum (see Figure 13A), provides a clear visual indication of suppressed long-wavelength density fluctuations (approximate hyperuniformity). The first diffraction minimum is located at approximately 3.3 cm, consistent with an effective disk diameter of $D \approx 128 \text{ }\mu\text{m}$.

This configuration provides a clear demonstration of correlation-induced features in a format suitable for laser printing. The resulting diffraction patterns are easily accessible for classroom or laboratory observation, enabling students to explore the influence of suppressed long-wavelength fluctuations on diffraction. Such visualizations offer a practical and intuitive way to connect theoretical concepts with observable optical phenomena.

10. Analogy with laser diffraction on spherical microparticles. The opaque microstructures considered in this work, in particular ensembles of disks, provide a clear optical analogue of diffraction and scattering by three-dimensional spherical microparticles. In the Fraunhofer regime, the scattering amplitude of an individual object is governed primarily by its projection onto the plane perpendicular to the incident beam. For particles whose characteristic dimensions are much larger than the wavelength, the diffraction pattern is therefore determined mainly by the geometric shadow of the object.

In this limit, the projection of an opaque or absorbing sphere of radius (R_{sp}) is equivalent to a circular disk of the same radius, which – according to Babinet's principle – is in turn equivalent to a circular aperture. Its diffraction pattern consists of a series of concentric rings, whose far-field intensities are described by (Fischbach & Bond, 1984):

$$I(\theta) \propto \left[\frac{2J_1\left(\frac{2\pi}{\lambda}R_{\text{sp}}\sin\theta\right)}{\frac{2\pi}{\lambda}R_{\text{sp}}\sin\theta} \right]^2, \quad (10)$$

where J_1 is Bessel function of the first kind and θ is the scattering angle. This expression coincides with the Fraunhofer diffraction result for an opaque circular disk of radius R_{sp} , obtained as the Fourier transform of a circular aperture. Within this approximation, the printed opaque disks used in the present work act as two-dimensional optical analogues of spherical scatterers.

However, for ensembles of identical particles, the observed diffraction pattern is not determined solely by the form factor of an individual element. Within the kinematic approximation commonly employed in wave-scattering theory, the total far-field intensity can be expressed as the product of the single-particle form factor and the ensemble structure factor (Feigin & Svergun, 1987; Guinier & Fournet, 1955). The form factor defines the overall envelope of the diffraction intensity, whereas the structure factor reflects spatial correlations between particle positions and governs the redistribution of intensity within this envelope.

This distinction becomes particularly evident when comparing ordered and disordered arrangements of identical disks (or, by analogy, spherical microparticles). Long-range order selects discrete diffraction directions associated with reciprocal-lattice vectors, whereas the absence of long-range order leads to an isotropic redistribution of scattered intensity. For disordered ensembles, such as Poisson point processes or configurations generated by Poisson disk sampling, the diffraction pattern is radially symmetric, and the contribution of the single-disk form factor manifests itself as concentric rings analogous to Airy rings.

In contrast, for periodic ensembles of disks arranged in square, centered square, or hexagonal lattices, continuous rings are not observed. Instead, diffraction intensity appears at discrete points in reciprocal space, whose positions are fixed by the

lattice geometry. The resulting diffraction pattern consists of a regular array of narrow maxima modulated by an envelope determined by the single-disk form factor, with only those reciprocal-lattice nodes lying within the region of significant form-factor amplitude being observable.

For particles of noncircular shape, such as opaque squares or rectangles, the single-element form factor becomes intrinsically anisotropic and is described by direction-dependent sinc-type functions. In periodic lattices of such elements, this anisotropy gives rise to direction-dependent diffraction intensities and selection rules. At the same time, for randomly oriented or statistically isotropic ensembles of noncircular elements, the anisotropic contributions of individual elements are effectively averaged out, and the resulting diffraction pattern again approaches radial symmetry despite the noncircular shape of the particles.

Thus, the binary amplitude masks proposed in this work enable a clear separation between the effects of individual particle shape (form factor) and spatial organization of the ensemble (structure factor). This separation represents a central concept in diffraction and scattering theory and provides a transparent educational framework for relating real-space microstructure to characteristic features of diffraction patterns in reciprocal space.

11. Educational analogies with X-ray Diffraction. The Fraunhofer laser diffraction patterns obtained from printed amplitude microstructures provide clear optical analogies of X-ray diffraction and scattering in crystalline, polycrystalline, amorphous, and correlated disordered materials.

Optical masks employed in the present work represent two-dimensional projections of the scattering density and therefore correspond to two-dimensional sections of reciprocal space, rather than full three-dimensional powder diffraction patterns. Consequently, the presented analogies are most directly related to Laue diffraction, two-dimensional scattering experiments, and planar sections commonly encountered in X-ray diffraction and small-angle X-ray scattering (SAXS). Within this well-defined limitation, the correspondence between optical and X-ray diffraction remains robust and instructive.

The transition from perfectly ordered lattices to disordered ensembles is particularly illustrative from a pedagogical perspective. Periodic microstructures produce discrete Bragg-like maxima that reflect lattice symmetry and basis effects, whereas disordered and partially ordered structures give rise to diffuse scattering, concentric rings, and correlation-induced features. These optical diffraction patterns provide direct qualitative analogies to powder X-ray diffraction and SAXS from disordered materials.

A qualitative summary of these optical diffraction analogies is provided in Appendix B (see table B1).

CONCLUSIONS AND PERSPECTIVES FOR A FURTHER RESEARCH

The integrated method developed in this work combines numerical simulations based on the two-dimensional fast Fourier transform with simple experimental visualizations of Fraunhofer diffraction using binary amplitude masks printed on transparent film and illuminated by a low-cost semiconductor laser pointer ($\lambda = 0.532 \mu\text{m}$). This approach provides a coherent and visually intuitive framework for teaching a wide spectrum of spatial arrangements – from perfectly periodic lattices (discrete Bragg peaks) through Poisson-distributed and Poisson-disk-sampled ensembles (isotropic speckle and diffraction rings) to hyperuniform-like structures (characteristic dark correlation ring) – and establishes direct optical analogies with X-ray Laue diffraction and small-angle scattering. Experimental diffraction patterns are complemented by numerical simulations, providing a more complete representation of diffraction from opaque disks.

The comparison is restricted to the spatial distribution of diffraction features, while absolute intensity values are not used as a metric of agreement.

From an educational perspective, the method is particularly powerful. Students can independently design masks of arbitrary complexity, print them on a standard office laser printer, observe the resulting far-field patterns on a screen, and directly compare them with numerical simulations. This hands-on workflow makes abstract concepts – Fourier optics, reciprocal space, structure factor, systematic absences, and short- and long-range correlations – tangible and memorable, while demonstrating the deep connection between optical diffraction and X-ray techniques.

At the same time, the laser printer itself embodies the pedagogical duality of the approach. On the one hand, it is an extremely accessible and inexpensive device available in virtually any educational institution. On the other hand, it is not a precision instrument at the microscale. Two main groups of fabrication-induced deviations appear systematically:

- Positioning inaccuracies and local distortions of the pixel grid, which are more pronounced for closely spaced structural elements;
- Toner spreading and halo formation during the fusing process, leading to an increase in the effective size of printed features relative to the nominal value, typically by 20–40%, which in turn is the main source of the observed size polydispersity.

Moreover, the effective size of opaque elements depends on the local pattern geometry: increased spacing tends to enhance toner spreading, whereas dense packing may lead to partial merging of features. In periodic lattices, these effects have only a minor influence on the positions of Bragg peaks in reciprocal space. However, in disordered ensembles, such as Poisson-distributed disks without a minimum inter-disk distance, the diffraction ring structure is highly sensitive: variations in effective disk diameter lead to radial scaling of diffraction rings, while size polydispersity reduces their contrast. At higher filling fractions, feature merging can further disrupt the ring structure, gradually transforming it into a diffuse speckle field. Therefore, when designing masks, it is advisable to deliberately reduce the nominal disk diameters by approximately 20–40% relative to the design values, depending on the specific printer and toner, in order to ensure that the observed diffraction patterns reproduce the predicted spatial features of the simulated patterns.

Importantly, these “imperfections” are not merely drawbacks. They provide a useful teaching opportunity: students learn to distinguish between ideal theoretical predictions and real experimental outcomes, quantify fabrication tolerances, and understand how the same physical limitations affect ordered versus disordered systems differently. This meta-level reflection

reinforces the link between theory, simulation, and experimental realization, one of the central goals of the proposed laboratory practicum.

Despite these practical limitations, the method remains robust, scalable, and highly adaptable. Future work may focus on quantitative analysis of diffraction intensity statistics, providing a more direct link between fabrication imperfections and far-field diffraction features, including speckle contrast, ring visibility, and correlation-induced effects. Higher-resolution printing technologies (2400–4800 dpi) would further enable exploration of finer structural regimes, including fractal, quasi-periodic, and hyperuniform patterns.

Overall, the integrated experimental–numerical framework provides a low-cost and versatile platform for teaching Fourier optics phenomena and bridging theoretical predictions with experimentally accessible realizations.

CONFLICT OF INTEREST

The authors declare no conflict of interest.

FUNDING SOURCES

This research did not receive any specific grant from funding agencies in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

DATA AVAILABILITY

The data associated with this study are available in Zenodo under the identifier <https://doi.org/10.5281/zenodo.18879679>.

USE OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE (AI) TOOLS

The Claude tool was used to assist in generating Python scripts or parts of scripts. All outputs were reviewed, tested, and manually corrected by the authors.

ACKNOWLEDGEMENTS

The authors would like to thank Dr Richard Cousins for assistance with microscopy at the Nanoscale and Microscale Research Centre (University of Nottingham, United Kingdom).

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

- Cowley, L., Laven, P., & Vollmer, M. (2005). Rings around the sun and moon: Coronae and diffraction. *Physics Education*, 40(1), 51. <https://doi.org/10.1088/0031-9120/40/1/004>
- Van Hook, S. J. (2007). Inquiry with laser printer diffraction gratings available to purchase. *The Physics Teacher*, 45(6), 340–343. <https://doi.org/10.1119/1.2768688>
- Brady, J. B., & Boardman, S. J. (1995). Introducing mineralogy students to X-ray diffraction through optical diffraction experiments using lasers. *Journal of Geological Education*, 43(5), 471–476. <https://doi.org/10.5408/0022-1368-43.5.471>
- Naimi, E. K. (2013). Demonstration of the Bragg diffraction of light by a 2D-photon structure. *Russian Microelectronics*, 42, 512–516. <https://doi.org/10.1134/S1063739713080118>
- Huang, D., Timmers, H., Roberts, A., Shivaram, N., & Sandhu, A. S. (2012). A low-cost spatial light modulator for use in undergraduate and graduate optics labs available to purchase. *American Journal of Physics*, 80(3), 211–215. <https://doi.org/10.1119/1.3666834>
- Tsutaoka, T., Tokunaga, T., Umeda, T., & Maehara, T. (2014). Observation of the two-dimensional reciprocal lattice by use of lattice grating sheets and a laser pointer. *European Journal of Physics*, 35(5), 055021. <https://doi.org/10.1088/0143-0807/35/5/055021>
- Peinado, A., Vidal, J., Escalera, J. C., Lizana, A., Campos, J., & Yzuel, M. (2012). Teaching Fraunhofer diffraction via experimental and simulated images in the laboratory. In *Optics Education and Outreach II* (Vol. 8481, p. 84810D). SPIE. <https://doi.org/10.1117/12.943241>
- Torquato, S., & Stillinger, F. H. (2003). Local density fluctuations, hyperuniformity, and order metrics. *Physical Review E*, 68, 041113. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.68.041113>
- Torquato, S. (2018). Hyperuniform states of matter. *Physics Reports*, 745, 1–95. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2018.03.001>
- Easley, C. J., Benninger, R. K., Shaver, J. H., Head, W. S., & Piston, D. W. (2009). Rapid and inexpensive fabrication of polymeric microfluidic devices via toner transfer masking. *Lab on a Chip*, 9, 1119–1127. <https://doi.org/10.1039/B816575K>
- Ghosh, R., Gopalakrishnan, S., Savitha, R., Renganathan, T., & Pushpavanam, S. (2019). Fabrication of laser printed microfluidic paper-based analytical devices (LP-μPADs) for point-of-care applications. *Scientific Reports*, 9, 7896. <https://doi.org/10.1038/s41598-019-44455-1>
- Born, M., & Wolf, E. (1999). *Principles of optics: Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light* (7th ed.). Cambridge University Press.
- Hecht, E. (2017). *Optics* (5th ed.). Pearson Education Limited.
- Guenther, B. D. (2020). *Modern optics simplified*. Oxford University Press.
- Bertero, M., Boccacci, P., & Pike, E. R. (1985). Particle-size distributions from Fraunhofer diffraction: The singular-value spectrum. *Inverse Problems*, 1(2), 111. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/1/2/003>
- Schneider, C., Rasband, W., & Eliceiri, K. (2012). NIH Image to ImageJ: 25 years of image analysis. *Nat Methods*, 9, 671–675. <https://doi.org/10.1038/nmeth.2089>
- Siegman, A. E. (1986). *Lasers*. University Science Books.
- Voronkin, O., & Lushchin, S. (2026). *Fraunhofer diffraction of laser-printed microstructures dataset*. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.18879679>
- Dainty, J. C. (Ed.). (1984). *Laser speckle and related phenomena* (2nd enlarged ed.). Springer-Verlag.
- Kingman, J. F. C. (1992). *Poisson processes*. Clarendon Press.
- Goodman, J. W. (1996). *Introduction to Fourier optics* (2nd ed.). McGraw-Hill.

22. Singh, M. (2023). A simple experiment to study the array theorem using Fraunhofer diffraction of a two-dimensional grating. *Physics Education*, 58(4), 045007. <https://doi.org/10.1088/1361-6552/acd5a3>
23. Bridson, R. (2007). Fast Poisson disk sampling in arbitrary dimensions. In *SIGGRAPH '07: ACM SIGGRAPH Sketches* (p. 22). ACM. <https://doi.org/10.1145/1278780.1278807>
24. Kathavate, Y. V. (1945). The diffraction of light by an assembly of opaque circular disks. *Proceedings of the Indian Academy of Sciences*, 21, 233–239. <https://doi.org/10.1007/BF03049858>
25. Li, D., Ke, X. L., Jing, H. M., Ping, C., Zhang, P., & Zhou, J. (2009). *Analysis on the Fraunhofer diffraction of randomly distributed holes* [English translation of title]. (8), 35–38. <https://dxwl.bnu.edu.cn/EN/Y2009/V28/I8/35>
26. Khachatryan, A. Zh., Harutyunyan, S. H., Khachikyan, L. E., Muradyan, T. R., Harutyunyan, G. A., & Aghabekyan, V. N. (2025). The plane wave diffraction on a flat area from randomly orientated rectangular apertures. *Results in Physics*, 75, 108348. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2025.108348>
27. Lloyd, S. (1982). Least squares quantization in PCM. *IEEE Transactions on Information Theory*, 28(2), 129–137. <https://doi.org/10.1109/TIT.1982.1056489>
28. Du, Q., Faber, V., & Gunzburger, M. (1999). *Centroidal Voronoi tessellations: Applications and algorithms*. *SIAM Review*, 41(4), 637–676. <https://doi.org/10.1137/S0036144599352836>
29. Fischbach, F. A., & Bond, J. S. (1984). *Fraunhofer diffraction patterns of microparticles*. *American Journal of Physics*, 52(6), 519–521. <https://doi.org/10.1119/1.13862>
30. Guinier, A., & Fournet, G. (1955). *Small-angle scattering of X-rays*. New York, NY: Wiley.
31. Feigin, L. A., & Svergun, D. I. (1987). *Structure analysis by small-angle X-ray and neutron scattering*. New York, NY: Plenum Press.

Appendix A

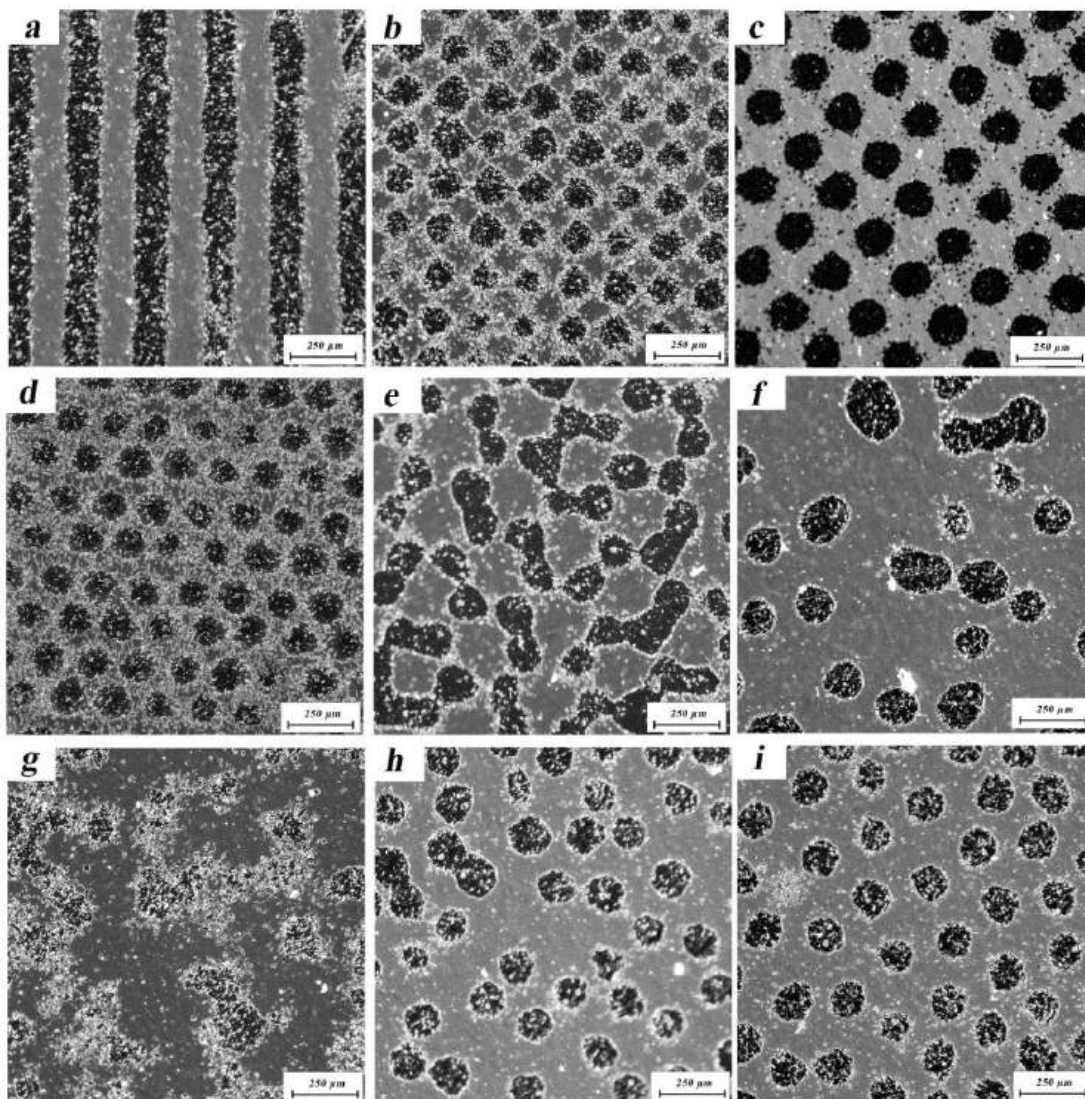


Figure A1. Optical micrographs of fragments from laser-printed A4 masks used in the diffraction experiments (scale bar: 250 μm in all panels). The listed parameters correspond to nominal design values; actual feature sizes vary due to fabrication effects such as broadening, partial merging, or distortion of neighboring elements.

(a) One-dimensional amplitude grating

(b) Two-dimensional periodic grating formed by a regular array of opaque disks

- (c) Periodic square grating with additional central disks
- (d) Two-dimensional hexagonal grating of opaque disks
- (e) Two-dimensional honeycomb grating
- (f) Random array of disks (Poisson point process). Sparse region; individual disks and some fused clusters visible.
- (g) Random array of disks (Poisson point process). Dense region with irregular toner agglomerates.
- (h) Disordered disk distributions with a minimal inter-disk distance (Poisson Disk Sampling)
- (i) Disk distribution generated using the PV-RBS algorithm

Appendix B

Table B1. Educational analogies between Fraunhofer laser diffraction patterns and X-ray diffraction and scattering phenomena

№	Microstructure type	Laser diffraction pattern	X-ray diffraction / scattering analog	Example material or system
1	One-dimensional grating	Series of discrete maxima aligned along one direction	Laue diffraction from layered or quasi-one-dimensional crystals; line-like reflections	Mica, NaCl viewed along [100]
2	Two-dimensional periodic grating (square lattice of disks)	Square grid of sharp diffraction spots indexed by (m, n)	Laue diffraction from cubic or tetragonal crystals along a principal axis	Si or NaCl in [001] orientation
3	Centered square lattice with a basis (additional disk at the unit-cell center)	Square grid with systematic absences for odd $(m + n)$	Laue diffraction from body-centered cubic lattices; structure-factor extinctions	Fe, W
4	Two-dimensional hexagonal grating of disks	Hexagonal array of Bragg maxima	Laue diffraction from hexagonal crystals	Graphite, ZnO (wurtzite structure)
5	Honeycomb grating (two-site basis on hexagonal grating)	Hexagonal reciprocal lattice modulated by basis-dependent intensity variations	Diffraction from two-dimensional crystals with a multi-atom basis	Graphene, hexagonal BN
6	Random array of disks (Poisson point process)	Bright central maximum with diffuse speckle background, absence of sharp rings	X-ray scattering from amorphous materials and liquids, characterized by diffuse scattering without sharp Bragg peaks	Glasses, liquids
7	Disordered disks with minimum inter-disk distance (Poisson disk sampling)	Central peak accompanied by concentric Airy-like rings due to short-range order	Powder X-ray scattering from nanoparticle ensembles dominated by finite-size effects and short-range correlation	Nanocrystalline metals, colloidal particles
8	Disordered array of randomly oriented square elements (Poisson disk sampling)	Isotropic ring structure modulated by the square-element sinc^2 form factor (azimuthal averaging of anisotropic contributions)	Powder X-ray scattering from randomly oriented anisotropic (plate-like) particles, dominated by the particle form factor	Clay minerals, platelet-like nanoparticles
9	Poisson–Voronoi disk structure with suppressed long-wavelength fluctuations (hyperuniform)	Central maximum containing a dark correlation ring indicating suppressed low-frequency scattering	SAXS signatures of hyperuniform disordered materials with suppressed $S(q \rightarrow 0)$	Hyperuniform glasses, jammed packings, disordered photonic solids

| Received: 15.02.2026 | Accepted: 30.03.2026 | Published: 30.04.2026 |



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.

ЧОТИРИ ТЕХНІКИ ПРОМПТИНГУ ДЛЯ АНАЛІТИЧНОЇ РОБОТИ З НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИМИ МАТЕРІАЛАМИ

Таяна ДЕОРДИЦА ✉

Центр освіти і кар'єри «IT Career HUB», Німеччина
TLDeorditsa@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-3409-7168>

Марина ВОРОНІНА

Державний науково-методичний центр
змісту культурно-мистецької освіти, Україна
M_Voronina@i.ua
<https://orcid.org/0000-0003-3838-7194>

Раїса ГЛАДУШИНА

Київський університет імені Бориса Грінченка, Україна
gladushyna.raisa@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-6760-0487>

Ольга ЄПІФАНОВА

Східноукраїнський національний університет
імені Володимира Даля, Україна
YepifanovaOlga@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0003-2518-3002>

Олена КОЗЬМЕНКО

Східноукраїнський національний університет
імені Володимира Даля, Україна
olena_kozmenko@ukr.net
<https://orcid.org/0000-0002-7063-2324>

Володимир ТОЛМАЧОВ

Глухівський національний педагогічний університет
імені Олександра Довженка, Україна
V.S.Tolmachov@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-4674-8677>

FOUR PROMPTING TECHNIQUES FOR ANALYTICAL WORK WITH TEACHING AND LEARNING RESOURCES

Taiana DIEORDITSA ✉

Education and Career Center «IT Career HUB», Germany
TLDeorditsa@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-3409-7168>

Maryna VORONINA

State Scientific and Methodological Center
for the Content of Cultural and Artistic Education, Ukraine
M_Voronina@i.ua
<https://orcid.org/0000-0003-3838-7194>

Raisa HLADUSHYNA

Borys Grinchenko Kyiv University, Ukraine
gladushyna.raisa@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-6760-0487>

Olga YEPIFANOVA

Volodymyr Dahl East Ukrainian National University, Ukraine
YepifanovaOlga@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0003-2518-3002>

Olena KOZMENKO

Volodymyr Dahl East Ukrainian National University, Ukraine
olena_kozmenko@ukr.net
<https://orcid.org/0000-0002-7063-2324>

Volodymyr TOLMACHOV

Oleksandr Dovzhenko Hlukhiv National
Pedagogical University, Ukraine
V.S.Tolmachov@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-4674-8677>

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. Викладачі дедалі активніше використовують великі мовні моделі (LLM) для вдосконалення навчально-методичних матеріалів (НММ). Проте більшість із них не має формальної підготовки в галузі штучного інтелекту, а тому вдається до безсистемних підходів. Описані у дослідницькій літературі техніки промптингу активують конкретні спроможності LLM і роблять взаємодію з моделлю передбачуваною та керованою. Однак наявні таксономії упорядковують ці техніки за внутрішньою логікою моделі, тоді як діяльність викладача визначається типом текстового завдання. Це зумовлює потребу у цілеспрямованому відборі технік для аналітичної роботи з НММ.

Матеріали і методи. Роботу виконано у форматі пошукового дослідження, кінцевим продуктом якого є готовий до практичного використання інструментарій для викладачів. Дослідження складалося з трьох етапів: теоретичного аналізу та синтезу дослідницької літератури; розроблення процедури відбору технік; пілотної апробації. За основу відбору взято таксономію Schulhoff et al. (2025), що охоплює 58 текстуальних технік промптингу.

ABSTRACT

Formulation of the problem. Teachers are increasingly using large language models (LLMs) to enhance their teaching and learning resources (TLRs). However, most of them have no formal training in artificial intelligence and therefore rely on unsystematic approaches. The prompting techniques described in research literature can activate specific capabilities of LLMs, making interactions more predictable and manageable. Yet most existing taxonomies classify these techniques according to the model's internal logic, whereas a teacher's work is typically organized around the type of textual task being addressed. This highlights the need for a more purposeful selection of prompting techniques that support analytical work with teaching and learning resources (TLRs).

Materials and methods. The research was conducted as an exploratory study, leading to the development of a practical toolkit for teachers. The study proceeded through three stages: a theoretical analysis and synthesis of the relevant literature, the development of a procedure for selecting appropriate prompting techniques, and pilot testing. The selection was based on the taxonomy by Schulhoff et al. (2025), which includes 58 textual prompting techniques.

Результати. Сформовано інструментарій із чотирьох технік промптингу – Role Prompting, Plan-and-Solve, Chain of Verification, Self-Refine – упорядкованих за логікою циклу Демінга (Plan→Do→Check→Act). Інструментарій реалізується через уніфіковані промпти-шаблони, адаптовані до чотирьох вимірів аналітичної роботи з НММ: змістового, структурно-логічного, мовно-стилістичного та оцінювального. Інструментарій допускає два режими використання: процедурний – із послідовним застосуванням усіх чотирьох технік, та автономний – із вибором однієї техніки відповідно до поточного завдання.

Висновки. Відібрані чотири техніки перетворюють роботу з LLM на зрозумілу послідовність дій і забезпечують викладачам структурований підхід до аналітичної роботи з НММ незалежно від рівня їхньої технічної підготовки. Водночас результати роботи моделі завжди потребують критичного оцінювання людиною.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: великі мовні моделі; техніки промптингу; навчально-методичні матеріали; цикл Демінга (PDCA); Role Prompting; Plan-and-Solve; Chain-of-Verification; Self-Refine.

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Деордіца Т., Вороніна М., Гладушина Р., Єпіфанова О., Козьменко О., Толмачов В. Чотири техніки промптингу для аналітичної роботи з навчально-методичними матеріалами. *Фізико-математична освіта*, 2026. Том 41. № 2. С. 46-55. <https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i2-04>.

Results. The study produced a practical toolkit featuring four prompting techniques: Role Prompting, Plan-and-Solve, Chain-of-Verification, and Self-Refine, organized according to the logic of the Deming cycle (Plan → Do → Check → Act). The toolkit is implemented through standardized prompt templates adapted to four dimensions of analytical work with LLMs: content, structural and logical organization, language and style, and evaluation. It can be used in two ways: a procedural mode, in which all four techniques are applied sequentially, and an autonomous mode, in which a teacher selects a single technique based on the specific task at hand.

Conclusion. The four selected techniques transform interaction with LLMs into a clear and well-defined set of steps. They provide teachers with a structured approach to analytical work with LLMs, regardless of their level of technical expertise. At the same time, any results generated by the model should always be critically evaluated by the user.

KEYWORDS: large language models; prompting techniques; teaching and learning resources; Deming cycle (PDCA); Role Prompting; Plan and-Solve; Chain-of-Verification; Self-Refine.

FOR CITATION: Dieorditsa, T., Voronina, M., Hladushyna, R., Yepifanova, O., Kozmenko, O., & Tolmachov, V. (2026). Four prompting techniques for analytical work with teaching and learning resources. *Physical and Mathematical Education*, 41(2), 46-55. <https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i2-04>.

ВСТУП

Постановка проблеми. Викладачі дедалі активніше використовують великі мовні моделі (LLM) для вдосконалення навчально-методичних матеріалів (лекцій, методичних вказівок тощо). Проте більшість із них не має формальної підготовки в галузі штучного інтелекту, а тому стикається з труднощами, адже не застосовує системний підхід і покладається на метод спроб і помилок, створюючи запити (Qian, 2025). Подолати цю проблему допомагають описані у дослідницькій літературі техніки промптингу, що активують конкретні спроможності LLM і роблять взаємодію з моделлю передбачуваною та керованою. Однак наявні таксономії класифікують ці техніки за внутрішньою логікою роботи моделі, тоді як діяльність викладача визначається типом текстового завдання. Стаття відповідає на питання: який набір технік промптингу забезпечує системний підхід до аналітичної роботи викладача з навчально-методичними матеріалами?

Аналіз актуальних досліджень. У цьому розділі розглянуто два взаємопов'язані блоки літератури: дослідження педагогічного застосування великих мовних моделей у вищій освіті та наявні систематизації технік промптингу. Перший блок встановлює контекст потреби, другий — наявний інструментарій і його обмеження.

Педагогічне застосування великих мовних моделей

Огляд публікацій 2023–2025 років засвідчує стрімке зростання інтересу до використання LLM у педагогічній діяльності у сфері вищої освіти. Так, Alenezi et al. (2024) дослідили виклики та можливості інтеграції цифрових технологій у вищу освіту. Yan et al. (2024) у систематичному огляді 118 публікацій виявили 53 сценарії використання LLM в освіті й задокументували пов'язані з ними практичні та етичні ризики.

Центральною для нашого дослідження є публікація (Qian, 2025), в якій систематизовано застосування генеративного штучного інтелекту (GenAI) за трьома основними напрямками: автоматизація зворотного зв'язку; когнітивна та афективна підтримка навчання; розвиток навичок вищого порядку. Дослідниця показала, що ефективна практика промптингу суттєво диференціюється залежно від дисципліни: у програмуванні вона потребує високої алгоритмічної точності, у медицині – відповідності стандартам іспитів, у педагогічних дисциплінах – критичної адаптації й рефлексії над згенерованим контентом. Концептуально ключовою для нас є запропонована Y. Qian операціоналізація конструкту промпт-грамотність (prompt literacy) як стратегічної здатності, що дає змогу розглядати GenAI не просто як інструмент автоматизації, а як партнера у розвитку критичного мислення. Поділяючи цю позицію, ми вважаємо, що інтеграція GenAI в освіту має ґрунтуватися на принципі підсилення людських можливостей, а не їх заміни.

Водночас реалізація цієї амбітної мети стикається зі стійкими перешкодами, які вже у 2023 році чітко задокументували В. Eager та R. Brunton. Ці дослідники виявили два тісно пов'язані бар'єри – брак структурованих знань про техніки промптингу та хронічний дефіцит часу, – що утворюють замкнене коло: інтуїтивне використання LLM призводить до нестабільних результатів, розчарування знижує мотивацію, а нестача часу блокує навчання та вихід із циклу. Наш річний досвід роботи з LLM підтверджує, що ці перешкоди зберігають актуальність. Наведений цими авторами практичний кейс Університету Тасманії показав: навіть мінімально структурований підхід – п'ятикомпонентна послідовність промптів – дав змогу викладачам переробити близько 80 % навчальних завдань протягом 40-хвилинного воркшопу (Eager & Brunton, 2023). Хоча оцінювання було неформальним (воно спиралося лише на зворотний зв'язок учасників), а узагальнення висновків обмежене специфікою кейсу, цей досвід ілюструє: викладачам потрібен не абстрактний курс AI-грамотності, а компактний, цільовий і низькопороговий набір технік промптингу.

Таксономії технік промптингу

Запит на структуровані знання про техніки промптингу формувався паралельно з розвитком промпт-інженерії як окремої галузі. На момент публікації (Eager & Brunton, 2023) різноманіття підходів – Chain-of-Thought, Few-Shot Learning,

Role Prompting та інші – існувало без єдиної класифікаційної рамки. Потреба впорядкувати цю галузь зумовила появу таксономій, три з яких здобули найширше визнання.

Sahoo et al. (2024) систематизують ≈ 41 техніку за 12 сферами практичного використання, з найдетальнішим описом блоку структурованого міркування (CoT, ToT, GoT, LogiCoT та понад 20 споріднених підходів). Класифікація орієнтована на оперативний добір методу під конкретний тип завдання.

Liu et al. (2025) будують таксономію навколо поняття pipeline – послідовності взаємопов'язаних фаз, які LLM-агент проходить від отримання запиту до формування кінцевої відповіді. За цією логікою, техніки промптингу розподіляються за чотирма компонентами: профіль та інструкція; зовнішні знання (RAG); міркування та планування; надійність.

Schulhoff et al. (2025) пропонують найбільш методологічно строго систематизацію: 58 текстуальних і 40 мультимодальних технік, виконану за стандартом PRISMA з глосарієм із 33 термінів.

Розглянуті таксономії є взаємодоповнювальними: перша орієнтована на практичний добір, друга – на архітектурне розуміння агента, третя слугує повним методологічним каталогом технік промптингу.

Для відбору технік для аналітичної роботи з НММ ми обрали таксономію за Schulhoff et al. На нашу думку, її методологічна строгість, вичерпний глосарій і найширше охоплення описаних у дослідницькій літературі технік забезпечують надійне підґрунтя для їх практичного застосування.

Отже, огляд літератури доводить, що попит на промпт-грамотність є реальним, однак брак структурованих знань про техніки промптингу і дефіцит часу блокують перехід від інтуїтивного до усвідомленого використання LLM. Наявні таксономії промптингу охоплюють увесь спектр технік, проте жодна з них не адаптована до практичних потреб викладача, зокрема до завдань цілеспрямованого вдосконалення навчально-методичних матеріалів. Саме ця прогалина між розробленим дослідницьким інструментарієм і потребами викладацької практики визначила мету нашої статті.

Мета статті – сформулювати та пілотно апробувати компактний набір технік промптингу та процедуру їх застосування для аналітичної роботи з навчально-методичними матеріалами.

Процедуру в цій статті ми тлумачимо як уніфіковану послідовність застосування відібраних технік промптингу.

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Охарактеризуємо ключові терміни, які утворюють логічний ланцюжок роботи з великими мовними моделями. Джерело усіх визначень – праця (Schulhoff et al., 2025).

Великі мовні моделі (Large Language Models, LLM) – це клас систем штучного інтелекту для роботи з природною мовою, які генерують текст на основі статистичного аналізу величезних обсягів текстових даних. LLM реалізуються у форматі загальнодоступних сервісів (наприклад, ChatGPT, Claude, Gemini). Базовий принцип їх роботи полягає у прогнозуванні наступного фрагмента тексту з урахуванням попереднього контексту. Завдяки навчанню на великих корпусах у моделях формуються імовірнісні представлення про закономірності слововживання та жанрово-стилістичні структури текстів, що й обумовлює здатність цих систем до генерації контекстуально доречних відповідей.

Промпт (від англ. Prompt – підказка) – це вхідні дані для генеративної моделі штучного інтелекту (GenAI), які використовують для спрямування її виходу. Промпт може складатися з тексту, зображення, звуку чи інших медіа.

Промптинг – це процес надання промπτу генеративній моделі, після чого вона генерує відповідь.

Техніка промптингу – шаблон, що описує, як структурувати промπτ, кілька промπτів або динамічну послідовність промπτів. Спосіб структурування визначає, які спроможності моделі будуть активовані.

Один із засобів реалізації технік промптингу – це тригерні фрази, тобто короткі формулювання, що скеровують модель до цільової поведінки. На відміну від звичайних інструкцій, тригерні фрази підвищують імовірність очікуваного результату: наприклад, «let's think step by step» активує послідовне розгортання міркування, натомість «re-read the question» спонукає модель повторно звернутися до умови задачі, знижуючи ризик відхилення від вимог. Як показано Kojima et al. (2022), тригерна фраза є не стилістичним вибором, а обов'язковим операційним елементом промπτу: ідентичне завдання без тригерної фрази дає менш передбачуваний результат.

Промпт-інженерія – ітеративний процес розроблення промπτу шляхом модифікації або зміни застосованої техніки промптингу.

Техніка промπτ-інженерії – стратегія ітеративного вдосконалення промπτу. У науковій літературі це найчастіше автоматизовані стратегії (Deng et al., 2022).

Розмежування технік промптингу і технік промπτ-інженерії є принциповим: стаття зосереджена виключно на першому типі, оскільки саме шаблони побудови запиту, а не стратегії їх автоматизованого вдосконалення, доступні викладачам-початківцям у роботі з LLM.

Вихідну множину технік для подальшого відбору становить таксономія Schulhoff et al. (2025), що охоплює 58 текстуальних технік промптингу в шести категоріях (табл. 1).

Таблиця 1. Категорії технік промптингу

№	Категорія (англ.)	Категорія (укр.)	Функція
1	Zero-Shot	Нульовий постріл	Прямі інструкції/питання без прикладів
2	Few-Shot	Кілька пострілів	Використання одного-кількох прикладів у промπτі
3	Thought generation	Генерація міркувань	Покрокове мислення, Chain-of-Thought та похідні
4	Decomposition	Декомпозиція	Розбиття складної задачі на простіші підзадачі
5	Ensembling	Ансамблювання	Агрегування кількох незалежних відповідей / промπτів
6	Self-Criticism	Самокритика	Самооцінка, самокорекція, аналіз власної відповіді

Джерело: авторська розробка на основі (Schulhoff et al., 2025)

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Дослідження реалізоване як пошукове (exploratory study): його мета – з'ясувати придатність інструментарію до практичного використання, а не виміряти його ефективність у контрольованих умовах. Такий дизайн зумовлений новизною предмета: усталених інструментів для оцінювання ефективності технік промптингу у викладацькій практиці ще не вироблено. Отримані результати можуть слугувати підґрунтям для формулювання гіпотез подальших контрольованих досліджень.

Виконання дослідження складалося з трьох послідовних етапів: теоретичного аналізу та синтезу літератури; розроблення процедури відбору технік; пілотної апробації отриманого інструментарію. Апробації передував 8-місячний період нецільеспрямованого використання LLM авторами у власній викладацькій практиці, який сформував первинний досвід і мотивацію для систематизації; власне, апробація за розробленою процедурою тривала 4 місяці. Розглянемо ці етапи детальніше.

I. Теоретичний аналіз і синтез

Проаналізовано систематичний огляд технік за (Schulhoff et al., 2025), що містить таксономію з 58 текстуальних технік промптингу. Огляд базується на PRISMA-процесі та охоплює 1565 наукових публікацій. Розглянуто статті-першоджерела вибраних технік промптингу.

Результатом цього етапу стало визначення вихідної множини технік для подальшого відбору.

II. Розроблення процедури відбору

Процедура складається з трьох стадій.

Стадія I. Відбір за критеріями (Кроки 1–3)

Крок 1. Релевантність. Техніки відбирали за критерієм функціональної придатності до аналітичної роботи з текстом, тобто спрямованості на аналіз, а не на генерацію чи переклад. Для операціоналізації цього критерію стосовно НММ автори виділили чотири виміри аналітичної роботи з текстом (табл. 2), упорядковані за принципом від змісту до форми.

Таблиця 2. Виміри та завдання аналітичної роботи з текстом НММ

Назва виміру	Завдання	Експертна позиція
Змістовий	<ul style="list-style-type: none"> Визначити відповідність змісту меті Знайти змістові прогалини Перевірити повноту розкриття теми 	Предметний експерт
Структурно-логічний	<ul style="list-style-type: none"> Перевірити логічну послідовність подачі матеріалу Виявити структурні прогалини Знайти логічні суперечності 	Методист
Мовно-стилістичний	<ul style="list-style-type: none"> Перевірити відповідність академічному стилю Виявити русизми та канцеляризми Виявити термінологічні помилки Оцінити точність формулювань 	Редактор
Оцінювальний	<ul style="list-style-type: none"> Оцінити відповідність цільовій аудиторії Визначити рівень складності матеріалу Перевірити відповідність дидактичним принципам 	Рецензент

Джерело: авторська розробка

Крок 2. Впорядкування відібраних технік за фазами циклу Демінга (його обрано як організаційну рамку за трьома критеріями: впізнаваність у практиці управління якістю освіти, що не потребує від викладача додаткової підготовки; структурною зручністю – чотири фази задають чотири послідовні типи аналітичних дій: постановку експертного контексту, виконання, верифікацію та корекцію; ітеративністю – завершення фази Act є одночасно поверненням до фази Plan для наступного виміру аналізу, що забезпечує циклічне охоплення всіх вимірів роботи з текстом НММ). Відповідність між техніками та фазами є орієнтовною: цикл Демінга використано не як строге теоретичне обґрунтування, а як впізнавану послідовність дій, що полегшує практичне освоєння інструментарію.

Техніки, що пройшли фільтр релевантності, розподіляли за чотирма фазами (Plan–Do–Check–Act) відповідно до їх функцій. Якщо техніка однаковою мірою відповідала двом фазам, фазу визначали експертним консенсусом авторського колективу, орієнтуючись на те, для якої фази техніка забезпечувала більш специфічний результат. Техніки, які не вдалося однозначно віднести до жодної фази, виключали з подальшого розгляду.

Крок 3. Відбір репрезентативних технік всередині фаз. Техніки, що потрапили до однієї фази, порівнювали попарно за трьома критеріями: функціональною відмінністю між результатами застосування, емпіричною підтримкою на текстових завданнях та застосовністю без програмування й автоматизації. Перевагу надавали техніці, яка за сукупністю критеріїв переважала решту технік своєї фази. Зокрема, Tree-of-Thoughts відхилено як функціонально надлишкову щодо Plan-and-Solve, але операційно складнішу; Self-Consistency — як таку, що потребує кількох незалежних запусків і тому виходить за межі застосовності без автоматизації.

Стадія II. Формування фінального набору інструментарію

Крок 4. Принцип мінімалізму: обрано чотири техніки, що забезпечують охоплення всіх фаз циклу Демінга без дублювання.

Потік відбору: із 58 технік таксономії за критерієм релевантності до аналітичної роботи з текстом у чотирьох вимірах відібрано 34; їх розподілено за фазами PDCA. Після попарного порівняння всередині фаз за трьома зазначеними критеріями кількість технік скоротилася до 10. На цьому етапі до фази Plan додано техніку Role Prompting, яка не увійшла до 34 за критерієм релевантності, але виконує функцію цілепокладання через постановку експертного контексту.

Це рішення зумовлене двома чинниками: хоча до фази Plan потрапили інші техніки, жодна з них не покривала функцію цілепокладання – визначення експертної позиції, яка задає перспективу і критерії аналізу для всього циклу; водночас саме призначення ролі є найбільш інтуїтивним першим кроком для викладача, який починає працювати з LLM. За принципом мінімалізму обрано чотири репрезентативні техніки.

Стадія III. Оформлення результату

Для кожної базової техніки створено структурований опис: фаза циклу Демінга, англійська та україномовна назви, категорія за класифікацією Schulhoff et al. (2025), концепція, призначення, тригерні фрази, що активують певні спроможності моделі, приклад застосування.

III. Пілотна апробація

Протягом лютого–вересня 2025 року шість авторів – фахівців у п'яти предметних галузях (комп'ютерні науки, агроінженерія, дизайн одягу та аксесуарів, психолінгвістика, англійська філологія) використовували LLM для роботи з реальними навчально-методичними матеріалами без єдиної процедури. Починаючи з жовтня 2025 року роботу переведено на систематичну апробацію за розробленою процедурою відбору, яка тривала 4 місяці (жовтень 2025 – січень 2026). За цей період опрацьовано майже 80 документів (конспектів лекцій – 20, методичних вказівок – 15, акредитаційних документів – 37, оцінювальних засобів – 6). Використано Claude 3.5 Sonnet (Anthropic), Grok 2 (xAI) та GPT-4 (OpenAI). Досвід підтвердив практичну застосовність інструментарію; його обмеження висвітлюються в розділі «Обговорення».

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

За результатами відбору сформовано компактний інструментарій із чотирьох функціонально відмінних технік, кожна з яких забезпечує унікальний тип аналітичного впливу на текст НММ. Візуальна схема на рис. 1 ілюструє розподіл відібраних технік за фазами циклу Демінга.

Розподіл технік за фазами відображає функціональне призначення кожної техніки. Role Prompting (рольове промптування) віднесено до фази «Plan», оскільки роль задається до початку будь-якої дії і виконує функцію цілепокладання для всього циклу. Plan-and-Solve (сплануй і виконай) – до фази «Do»: етап планування в цій техніці підпорядкований виконанню, а кінцевим продуктом є виправлений текст. Chain-of-Verification (послідовність перевірки) віднесено до фази «Check», оскільки її мета – верифікація точності тверджень; вдосконалення ж тексту є наслідком цієї перевірки, а не самостійною ціллю. Self-Refine (самовдосконалення) – до фази «Act», оскільки її визначальна функція – ітеративне усунення виявлених проблем через цикл критики та правки.



Рис. 1. Систематизація чотирьох технік промптингу для удосконалення навчально-методичних матеріалів за логікою циклу Демінга

Джерело: Розроблено авторами із суттєвою адаптацією схеми циклу Демінга зі стандарту ISO/IEC 27001:2022 (інвертовано кольори, додано техніки промптингу)

Розглянемо кожну техніку детальніше за такою структурою: категорія, концепція, призначення, тригерні фрази, застосування.

ФАЗА PLAN (ПЛАНУЙ)

1. **Role Prompting** (рольове промптування)

Категорія – Zero-Shot.

Концепція: LLM здатна імітувати різні експертні позиції, адаптуючи стиль, тон та рівень деталізації відповіді залежно від заданої ролі (Shanahan et al., 2023). Формулювання ролі на початку промпту задає рамки для генерації відповіді.

Призначення: визначення контексту взаємодії через надання моделі експертної позиції. Це дає змогу адаптувати відповідь для конкретної аудиторії, задати очікуваний формат та рівень складності викладу, що особливо важливо для адаптації НММ до різних цільових груп студентів.

Тригерні фрази: act as, you are a, role of, pretend you are (англ.); дій як, ти є, виконуєш роль, уяви себе (укр.).

Застосування: Техніка реалізується в один крок – формулювання ролі на початку запиту – і виконує функцію цілепокладання: обрана експертна позиція визначає перспективу, критерії та пріоритети аналізу.

На відміну від наведених далі трьох технік, рольове промптування не має окремої таблиці промпту: воно реалізується через рядок «Роль» у таблицях 3–5.

ФАЗА DO (ВИКОНУЙ)

2. **Plan-and-Solve** (сплануй і виконай)

Категорія – Thought Generation.

Концепція: Plan-and-Solve Prompting складається з двох компонентів: спочатку модель розробляє план, розбиваючи завдання на менші підзадачі, а потім послідовно виконує кожну підзадачу відповідно до плану (Wang et al., 2023). Явне формулювання плану перед виконанням структурує міркування моделі, оскільки ключові аспекти завдання визначаються до початку роботи з текстом.

Призначення: систематичне удосконалення НММ шляхом розділення планування та виконання. Модель спочатку визначає перелік аспектів для аналізу (змістові прогалини, логічні розриви, нечіткі формулювання), а потім послідовно опрацьовує кожен із них. Це знижує ризик ситуації, коли модель, виправляючи один аспект, залишає поза увагою інші.

Тригерні фрази: devise a plan and solve, first plan then execute, break this into steps and solve each (англ.); спочатку сплануй, потім виконай; розбий на кроки і виконай послідовно; спершу визнач, що потрібно зробити (укр.).

Застосування: техніка реалізується у два етапи — планування та виконання (табл. 3).

Таблиця 3. Застосування техніки Plan-and-Solve для удосконалення НММ

Елемент промпту	Зміст
Роль	Ти — професійний { РОЛЬ _з табл. 2} з багаторічним досвідом
Поточний фокус	Поточний вимір аналізу: { НАЗВА_ВИМІРУ _з табл. 2} Фокусне завдання: { КОНКРЕТНЕ_ЗАВДАННЯ _з табл. 2} (якщо конкретне завдання не потрібне — цей рядок просто не вставляється)
Контекст матеріалу	Контекст матеріалу: <ul style="list-style-type: none"> Назва: {назва_матеріалу} Предметна галузь: {предмет} Цільова аудиторія: {аудиторія} Рівень підготовки (якщо вказано): {рівень}
Текст для аналізу	(Вставте повний або частковий текст навчально-методичного матеріалу)
Важливі правила	Важливі правила: <ul style="list-style-type: none"> Працюй виключно у межах вказаного виміру та (якщо задано) фокусного завдання. Не виправляй аспекти, які належать до інших вимірів, навіть якщо бачиш там очевидні проблеми. Зберігай авторський задум, тон і стиль, якщо це не суперечить завданню. Якщо за вказаним виміром/завданням проблем не виявлено, вкажи це явно та зупинись.
Інструкція	Працюй у два етапи. Обов’язково використовуй зазначені заголовки: Етап 1. Аналіз і планування 1. Перелічи виявлені проблемні місця (нумерований список): <ul style="list-style-type: none"> місце: номер абзацу / речення / коротка цитата; недолік: чіткий опис проблеми (1–2 речення). 2. Склади пріоритетний план правок (нумерований список, 1 — найважливіше): <ul style="list-style-type: none"> що саме змінити; коротке обґрунтування пріоритету. Етап 2. Виконання правок 3. Внеси всі заплановані зміни послідовно. 4. Надай результат у такому вигляді: <ul style="list-style-type: none"> Оновлений текст. Таблиця верифікації (№ проблеми Опис проблеми Запланована правка Виконано (✓/X) Коментар). 5. Якщо проблем не виявлено — напиши: «Аналіз завершено. Текст не потребує правок у межах вказаного виміру/завдання». На кроці 4 поверни оригінальний текст
Формат подання результату	Надай результат у такому вигляді: <ul style="list-style-type: none"> Оновлений текст Таблиця верифікації (№ проблеми Опис проблеми Запланована правка Виконано (✓/X) Коментар)
Мова та стиль відповіді	Пиши чітко, професійно, академічною українською мовою

Джерело: авторська розробка

ФАЗА CHECK (ПЕРЕВІРЯЙ)

3. **Chain-of-Verification** (Послідовність перевірки)

Категорія – Self-Criticism.

Концепція: Chain-of-Verification (CoVE) працює за принципом послідовної верифікації: модель аналізує наявний текст, формулює перевірочні питання до його тверджень, відповідає на кожне з них і створює фінальну уточнену версію (Dhuliwala et al., 2023). На відміну від Plan-and-Solve, який спрямований на виконання конкретних дій, CoVE націлений

на перевірку точності та повноти наявного тексту, що робить його ефективним інструментом з контролю якості навчальних матеріалів.

Призначення: верифікація змістової точності та повноти НММ із застосуванням циклу «проаналізувати текст → сформулювати перевірочні питання → відповісти на них → уточнити текст». Техніка забезпечує виявлення неточностей, прогалин у змісті та логічних суперечностей — і в такий спосіб реалізує завдання етапу Check.

Тригерні фрази: verify each claim, generate verification questions for your response, check your draft for accuracy, list questions to verify the text and answer them (англ.); перевір кожне твердження, сформулюй перевірочні питання та дай на них відповідь, перевір текст на точність (укр.).

Застосування: техніка реалізується через чіткий п'ятикроковий цикл у промпті. За умови відповідної інструкції модель видає верифікований текст із переліком внесених уточнень (табл. 4).

Таблиця 4. Застосування техніки Chain-of-Verification для удосконалення НММ

Елемент промпту	Зміст
Роль	Ти — фахівець у галузі {НАЗВА ГАЛУЗІ} з багаторічним досвідом аналізу та вдосконалення навчально-методичних матеріалів
Текст для аналізу	(Вставте повний або частковий текст навчально-методичного матеріалу)
Важливі правила	Важливі правила <ul style="list-style-type: none"> • Зберігай авторський стиль і задум. • Внось тільки мінімально необхідні зміни. • Відповіді на перевірочні питання давай незалежно, без посилання на наданий текст.
Інструкція	Виконай верифікацію тексту за циклом CoVE: <i>Крок 1.</i> Початковий аналіз Уважно прочитай текст. Витягни ключові твердження (нумерований список, 5–15 тверджень максимум). <i>Крок 2.</i> План верифікації Для кожного твердження сформулюй 1–2 точних перевірочних питання (на які можна відповісти фактами, логікою або змістом тексту). <i>Крок 3.</i> Незалежні відповіді На кожне питання дай коротку, точну відповідь без доступу до наданого тексту (тільки на основі знань і логіки). <i>Крок 4.</i> Виявлення неточностей Порівняй відповіді з оригінальними твердженнями. Визнач неточності, прогалини, суперечності. <i>Крок 5.</i> Уточнена версія На основі виявленого напиши покращену версію тексту (з мінімальними змінами). Якщо проблем не виявлено — на кроці 4 напиши: «Неточностей не виявлено», а на кроці 5 поверни оригінальний текст
Формат подання результату	Надай результат у такому вигляді: <ul style="list-style-type: none"> • Оновлений текст. • Таблиця верифікації (№ твердження Перевірочне питання Відповідь Статус (підтверджено/уточнено/вилучено) Внесена зміна)
Мова та стиль відповіді	Пиши чітко, професійно, академічною українською мовою

Джерело: авторська розробка

ФАЗА АСТ (КОРИГУЙ)

4. Self-Refine (самовдосконалення)

Категорія – Self-Criticism.

Концепція: Madaan et al. (2023) запропонували метод, у якому LLM послідовно проходить два етапи: генерує критичну оцінку власної відповіді з виявленням слабких місць, а потім на її основі формує виправлену версію.

Призначення: ітеративне вдосконалення НММ через механізм самокритики та корекції. Це дає змогу поліпшити структуру та логіку викладу, уточнити формулювання, адаптувати рівень складності до потреб студентів.

Тригерні фрази: critique your output and improve it, review and refine iteratively, identify weaknesses and fix them, provide feedback on your response then revise (англ.); оціни критично та вдоскональ, знайди слабкі місця і виправ, переглянь і вдоскональ ітеративно (укр.).

Застосування: техніка реалізується через ітеративний цикл у промпті з чітко визначеним критерієм зупинки. За умови відповідної інструкції модель видає послідовно вдосконалені версії тексту з обґрунтуванням внесених змін (табл. 5).

Обидві техніки – Chain-of-Verification та Self-Refine – належать до категорії Self-Criticism (Schulhoff et al., 2025) і обидві створюють покращену версію тексту. Проте їхні функції не дублюються, оскільки механізми отримання цього результату принципово відрізняються. Chain-of-Verification покращує текст через верифікацію тверджень: модель формулює перевірочні питання, відповідає на них незалежно від наданого тексту і вносить зміни на основі розбіжностей між цими відповідями та оригінальними твердженнями. Self-Refine покращує текст через ітеративну самокритику: модель оцінює якість викладу, формулює зауваження і циклічно коригує текст до досягнення прийнятного рівня якості. У логіці циклу Демінга це відповідає різним фазам – Check та Act.

Таблиця 5. Застосування техніки Self-Refine для удосконалення НММ

Елемент промпту	Зміст
Роль	Ти — професійний {РОЛЬ_з_табл. 2} з багаторічним досвідом
Поточний фокус	Поточний вимір аналізу: {НАЗВА_ВИМІРУ з табл. 2} Фокусне завдання: {КОНКРЕТНЕ_ЗАВДАННЯ з табл. 2} (якщо конкретне завдання не потрібне — цей рядок просто не прописувати)
Текст для аналізу	(Вставте повний або частковий текст навчально-методичного матеріалу)
Важливі правила	<ul style="list-style-type: none"> • Працюй виключно у межах вказаного виміру та (якщо задано) фокусного завдання. • Не чіпай інших аспектів тексту. • Зберігай авторський стиль, тон і задум. • Кожна ітерація — це окремий цикл критики + правки
Інструкція	<p>Виконай ітеративне самовдосконалення тексту за циклом Self-Refine: Почни з оригінального тексту як початкової чернетки. Ітерація 1 (і далі до зупинки) Крок 1. Критично проаналізуй поточну версію тексту з позиції виміру/завдання. Перелічи слабкі місця (нумерований список). Крок 2. Дай детальну критичну оцінку: що саме погано, чому це проблема, як це впливає на якість НММ. Крок 3. Запропонуй конкретні мінімальні зміни для виправлення (без переписування всього тексту). Крок 4. Створи нову версію тексту, вніши запропоновані зміни. Крок 5. Оціни нову версію і дай оцінку 1–10 та обґрунтування виправлень. Критерій зупинки Зупинись, коли:</p> <ul style="list-style-type: none"> • оцінка $\geq 8/10$ і відсутні критичні зауваження • або виконано 3 ітерації. <p>Якщо зупинка не досягнута — повтори цикл з новою версією як поточним текстом</p>
Формат подання результату	Надай результат у такому вигляді: <ul style="list-style-type: none"> • Оновлений текст. • Таблиця верифікації (№ ітерації Виявлені слабкі місця Внесені зміни Оцінка (1–10) Підстава для продовження / зупинки)
Мова та стиль відповіді	Пиши чітко, професійно, академічною українською мовою

Джерело: авторська розробка

Таблиці 3–5 ілюструють застосування технік промптингу для аналітичної роботи з текстом НММ. Пропоновані промпти побудовано за уніфікованою структурою зі змінними: роль і конкретні завдання визначаються виміром аналізу відповідно до табл. 2; текст НММ, предметну галузь та аудиторію викладач підставляє самостійно.

Ілюстрація принципу застосування процедури на фрагменті тексту з теми «Захист даних в Інтернеті» з підручника «Інформатика» для 8 класу.

Вихідний текст:

Якщо комп'ютер підключений до інтернету, то будь-який користувач, також підключений до інтернету, може отримати доступ до інформаційних ресурсів цього комп'ютера. Механізми проникнення з інтернету на локальний комп'ютер і в локальну мережу можуть бути різними:

- вебсторінки, що завантажуються в браузер, можуть містити активні елементи, здатні виконувати деструктивні дії на локальному комп'ютері;
- деякі вебсервери розміщують на локальному комп'ютері текстові файли cookie, використовуючи які можна отримати конфіденційну інформацію про користувача локального комп'ютера;
- електронні листи або дописи в соціальних мережах можуть містити шкідливі посилання;
- за допомогою спеціальних програм можна отримати доступ до дисків і файлів локального комп'ютера тощо.

Виявлені недоліки (стислий перелік):

- логічні неточності: перебільшення ризику (не «будь-який користувач», а зловмисники за певних умов);
- відсутність згадки про заходи захисту;
- лінгвістичні проблеми: довгі речення, відсутність пояснень термінів;
- неадаптованість до рівня 8-го класу: складний синтаксис, брак прикладів з життя підлітків, «сухий» стиль.

Фінальний адаптований текст

Якщо твій комп'ютер або телефон підключений до Інтернету і на ньому немає захисту (наприклад антивірусу чи оновлень), зловмисники можуть спробувати отримати доступ до твоїх файлів. Ось як це може статися:

- ти заходиш на сайт зі шкідливим кодом (наприклад JavaScript) — якщо браузер не захищений, вірус запуститься;
- сайти залишають куки для стеження за твоїми діями, але ти можеш їх заблокувати в налаштуваннях;
- у повідомленні в Instagram чи Telegram — підозріле посилання веде до вірусу або фішингу (обман для отримання паролей);

– трояни чи програми віддаленого доступу крадуть файли, якщо немає двофакторного захисту.

Пам'ятай: перевіряй посилання та оновлюй програми!

Наведений фрагмент ілюструє загальний характер змін, що досягаються застосуванням процедури; детальний покроковий приклад із результатами кожної техніки окремо є предметом подальших публікацій.

Внесок кожної техніки в адаптацію тексту:

- Role Prompting → визначено експертну позицію: адаптація тексту для учнів 8-го класу як цільової аудиторії;
- Plan-and-Solve → виявлено і виправлено змістові проблеми: перебільшення ризиків уточнено, додано умови та заходи захисту;
- Chain-of-Verification → верифіковано точність тверджень: усунено логічну неточність «будь-який користувач може отримати доступ»;
- Self-Refine → ітеративно вдосконалено виклад: довгі речення розбито, терміни спрощено або пояснено, стиль адаптовано до вікової аудиторії.

ОБГОВОРЕННЯ

Згідно з третім законом Кларка, «будь-яка достатньо розвинена технологія невідрізнявана від магії» (Clarke, 1973). Запропонований інструментарій не робить LLM прозорішою – але перетворює взаємодію з нею на керовану послідовність дій. Водночас результати роботи моделі завжди потребують критичного оцінювання людиною.

Запропонований інструментарій допускає два режими використання. У процедурному режимі всі чотири техніки застосовуються у визначеній послідовності, де цикл Демінга задає логіку переходу між ними і забезпечує аналіз тексту за всіма чотирма вимірами. В автономному режимі викладач обирає одну техніку відповідно до поточного завдання; цикл Демінга в цьому разі допомагає визначити, до якого виміру аналізу належить обране завдання. Його чотири фази реалізуються послідовно: Role Prompting задає експертний контекст, Plan-and-Solve формує першу виправлену версію, Chain-of-Verification верифікує її через перевіірочні питання, Self-Refine виконує фінальне вдосконалення. Цикл повторюється для кожного наступного виміру, забезпечуючи системне охоплення аналітичної роботи з текстом НММ.

Для практичного впровадження автори рекомендують поступове освоєння інструментарію. Викладачам, які лише починають роботу з LLM, доцільно розпочинати з автономного режиму – зокрема з Role Prompting та Self-Refine: ці техніки є відносно простими у застосуванні і дають відчутний результат уже на перших спробах. Здобувши практичний досвід, варто долучати Chain-of-Verification і Plan-and-Solve – техніки, що вимагають чіткішого формулювання завдань і розуміння структури відповіді моделі. Процедурний режим із повним циклом Демінга є найбільш повним форматом використання інструментарію і рекомендується тим, хто вже впевнено працює з усіма чотирма техніками окремо.

Разом з тим, запропонований інструментарій не претендує на оптимальність: він є результатом відбору за визначеними критеріями, підтвердженого 4-місячним досвідом авторського колективу. За інших умов – предметних галузей, типів НММ, завдань удосконалення або моделей LLM – ефективнішими можуть виявитися альтернативні техніки та їхні комбінації.

Наведені рекомендації сформульовано на основі пошукового дослідження, що має низку обмежень. Результати ґрунтуються на досвіді шістьох авторів, а не на контрольованому експерименті; окремі класифікаційні рішення (зокрема, віднесення техніки до фази циклу Демінга) ухвалювалися експертним консенсусом і є потенційним джерелом суб'єктивності. Апробацію здійснено на навчально-методичних матеріалах освітніх програм у межах лише п'яти предметних галузей. Ефективність технік оцінювалася якісно (колективне експертне оцінювання та авторська рефлексія), без кількісних метрик. З-поміж використаних моделей найстабільніші результати, за суб'єктивною оцінкою авторів, забезпечував Claude 3.5 Sonnet, дещо нижчу якість демонстрував Grok 2, тоді як GPT-4 найчастіше потребував додаткових ітерацій.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Стаття розв'язує практичну проблему: викладачі без формальної підготовки в галузі штучного інтелекту потребують компактного інструментарію для системної роботи з LLM. Запропоноване рішення ґрунтується не на створенні нових технік промптингу, а на їх цілеспрямованому відборі, адаптації та упорядкуванні відповідно до потреб аналітичної роботи з навчально-методичними матеріалами.

Основні результати пошукового дослідження:

- розроблено процедуру відбору технік промптингу із таксономії Schulhoff et al. (2025), що поєднує фільтр релевантності, розподіл за фазами циклу Демінга та попарне порівняння за трьома критеріями;
- сформовано інструментарій із чотирьох технік — Role Prompting, Plan-and-Solve, Chain-of-Verification, Self-Refine — з уніфікованими промптами-шаблонами, адаптованими до чотирьох вимірів аналітичної роботи з НММ;
- запропоновано два режими використання — процедурний (послідовне застосування за логікою циклу Демінга) та автономний (вибір однієї техніки відповідно до поточного завдання). Водночас результати роботи моделі завжди потребують критичного оцінювання людиною.

Апробація протягом 4 місяців на майже 80 документах у п'яти предметних галузях дає підстави для висновку про практичну застосовність інструментарію.

Перспективними є два напрями подальших досліджень: верифікація результатів у контрольованих умовах на незалежній вибірці та порівняльне оцінювання альтернативних комбінацій технік промптингу.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів.

ДЖЕРЕЛА ФІНАНСУВАННЯ

Роботу виконано за відсутності фінансової підтримки.

ДОСТУПНІСТЬ ДАНИХ

Результати застосування процедури відбору представлені безпосередньо в тексті статті. Структурований промпт, розроблений авторами для верифікації процедури відбору технік, зберігається в авторському архіві.

ВИКОРИСТАННЯ ЗАСОБІВ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

У процесі підготовки роботи використовувалися Claude 3.5 Sonnet (Anthropic), Grok 2 (xAI) та GPT-4 (OpenAI) – для верифікації процедури відбору технік промптингу, тестування та апробації розроблених промптів-шаблонів, а також пошуку релевантних джерел. Усі результати критично переглянуті, перевірені та відредаговані авторами. Авторі несуть повну відповідальність за зміст публікації.

АВТОРСЬКИЙ ВНЕСОК

Таяна Деордіца (комп'ютерні науки) – Керівництво; Концептуалізація; Методологія; Дослідження; Валідація; Формальний аналіз; Написання – початковий варіант рукопису.

Марина Вороніна (дизайн одягу та аксесуарів) – Методологія; Дослідження; Валідація; Візуалізація; Написання – перегляд та редагування.

Раїса Гладушина (психолінгвістика) – Дослідження; Валідація; Написання – перегляд та редагування.

Ольга Єпіфанова (агроінженерія) – Дослідження; Валідація; Написання – перегляд та редагування.

Олена Козьменко (англійська філологія) – Дослідження; Валідація; Написання – перегляд та редагування.

Володимир Толмачов (комп'ютерні науки) – Методологія; Дослідження; Валідація; Візуалізація; Формальний аналіз; Написання – перегляд та редагування.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ / REFERENCES

- Alenezi, M., Wardat, S., & Akour, M. (2024). The need of integrating digital education in higher education: Challenges and opportunities. *Frontiers in Education*, 9, 1392091. <https://doi.org/10.3389/educ.2024.1392091>
- Clarke, A. C. (1973). *Profiles of the Future: An Inquiry into the Limits of the Possible* (Rev. ed.). Harper & Row.
- Deng, M., Wang, J., Hsieh, C.-P., Wang, Y., Guo, H., Shu, T., Song, M., Xing, E. P., & Hu, Z. (2022). RLPrompt: Optimizing discrete text prompts with reinforcement learning. In *Proceedings of the 2022 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing*, 3369–3391. <https://doi.org/10.18653/v1/2022.emnlp-main.222>
- Dhuliawala, S., Komeili, M., Xu, J., Raileanu, R., Li, X., Celikyilmaz, A., & Weston, J. (2023). Chain-of-verification reduces hallucination in large language models. *arXiv*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2309.11495>
- Eager, B., & Brunton, R. (2023). Prompting higher education towards AI-augmented teaching and learning practice. *Journal of University Teaching & Learning Practice*, 20(5), Article 2. <https://doi.org/10.53761/1.20.5.02>
- Kojima, T., Gu, S. S., Reid, M., Matsuo, Y., & Iwasawa, Y. (2022). Large language models are zero-shot reasoners. In *Advances in Neural Information Processing Systems* (Vol. 35, pp. 22199–22213). https://proceedings.neurips.cc/paper_files/paper/2022/file/8bb0d291acd4acf06ef112099c16f326-Paper-Conference.pdf
- Liu, Y.-Y., Zheng, Z., Zhang, F., Feng, J.-C., Fu, Y., Zhai, J., He, B., Zhang, Y., & Du, X. (2025). A comprehensive taxonomy of prompt engineering techniques for large language models. *Frontiers of Computer Science*, 19(6), Article 196904. <https://doi.org/10.1007/s11704-025-50058-z>
- Madaan, A., Tandon, N., Gupta, P., Hallinan, S., Gao, L., Wiegrefe, S., Alon, U., Dziri, N., Prabhunoye, S., Yang, Y., Welleck, S., Majumder, B. P., Gupta, S., Yazdanbakhsh, A., & Clark, P. (2023). Self-refine: Iterative refinement with self-feedback. In *Advances in Neural Information Processing Systems* (Vol. 36). <https://doi.org/10.48550/arXiv.2303.17651>
- Qian, Y. (2025). Pedagogical applications of generative AI in higher education: A systematic review of the field. *TechTrends*, 69(5), 1105–1120. <https://doi.org/10.1007/s11528-025-01100-1>
- Sahoo, P., Singh, A. K., Saha, S., Jain, V., Mondal, S., & Chadha, A. (2024). A systematic survey of prompt engineering in large language models: Techniques and applications. *arXiv*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2402.07927>
- Schulhoff, S., Ilie, M., Balepur, N., Kahadze, K., Liu, A., Si, C., Li, Y., Gupta, A., Han, S. I., Schulhoff, S., Hao, Y., Seifermann, M., & Schwartz, P. (2025, v6). The prompt report: A systematic survey of prompting techniques. *arXiv*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2406.06608>
- Shanahan, M., McDonell, K., & Reynolds, L. (2023). Role play with large language models. *Nature*, 623(7987), 493–498. <https://doi.org/10.1038/s41586-023-06647-8>
- Wang, L., Xu, W., Lan, Y., Hu, Z., Lan, Y., Lee, R. K.-W., & Lim, E.-P. (2023). Plan-and-Solve Prompting: Improving Zero-Shot Chain-of-Thought Reasoning by Large Language Models. In *Proceedings of the 61st Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics* (Vol. 1, pp. 2609–2634). <https://doi.org/10.48550/arXiv.2305.04091>
- Yan, L., Sha, L., Zhao, L., Li, Y., Martinez-Maldonado, R., Chen, G., Li, X., Jin, Y., & Gašević, D. (2024). Practical and ethical challenges of large language models in education: A systematic scoping review. *British Journal of Educational Technology*, 55(1), 90–112. <https://doi.org/10.1111/bjet.13370>

| Матеріал надійшов до редакції: 05.01.2026 р. | Прийнято до друку: 26.02.2026 р. | Опубліковано: 30.04.2026 р. |



This work is licensed under Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.

ВИКОРИСТАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ГЕЙМІФІКАЦІЇ ПРИ ВИКЛАДАННІ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ У ЗВО

Ганна ЛІННИК

Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут», Україна
Hanna.Linnyk@khpі.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0003-4227-3210>

Ірина МОРАЧКОВСЬКА ✉

Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут», Україна
Iryna.Morachkovska@khpі.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0002-4164-4780>

USE OF GAMIFICATION ELEMENTS IN TEACHING MATHEMATICAL ANALYSIS AT HIGHER EDUCATION INSTITUTIONS

Hanna LINNIK

National Technical University
"Kharkiv Polytechnic Institute", Ukraine
Hanna.Linnyk@khpі.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0003-4227-3210>

Iryna MORACHKOVSKA ✉

National Technical University
"Kharkiv Polytechnic Institute", Ukraine
Hanna.Linnyk@khpі.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0003-4227-3210>

АНОТАЦІЯ

У статті представлено результати дослідження ефективності використання гейміфікаційних елементів у процесі вивчення дисципліни «Математичний аналіз» у Національному технічному університеті «Харківський політехнічний інститут». Дослідження спрямоване на оцінювання впливу гейміфікованих підходів на навчальну мотивацію, пізнавальну активність і якість засвоєння теоретичного матеріалу студентами технічних спеціальностей.

Формулювання проблеми. Сучасне викладання математичних дисциплін характеризується високим рівнем абстрактності, що часто призводить до зниження мотивації студентів і формального засвоєння знань. У зв'язку з цифровізацією освітнього середовища актуальним є пошук ефективних дидактичних інструментів, здатних активізувати навчальну діяльність. У статті досліджується проблема доцільності та результативності впровадження гейміфікації у викладанні математичного аналізу.

Матеріали і методи. У ході дослідження було розроблено та впроваджено авторську дидактичну гру «Математичні асоціації», яка застосовувалася під час практичних занять з математичного аналізу. Експериментальною базою стали академічні групи студентів першого курсу. Використовувалися методи педагогічного спостереження, анкетування, аналізу навчальної активності та результатів виконання завдань. Для організації зворотного зв'язку застосовувалися цифрові інструменти Office 365.

Результати. Отримані результати засвідчили зростання рівня залученості студентів до навчального процесу, підвищення інтересу до дисципліни та покращення розуміння ключових тем математичного аналізу. Було зафіксовано активізацію комунікації в академічних групах і підвищення навчальної активності більшості учасників. Разом з тим, виявлено незначну частку студентів, які віддали перевагу традиційним методам навчання.

Висновки. Результати дослідження підтверджують ефективність використання гейміфікації у викладанні математичного аналізу як засобу підвищення навчальної мотивації, розвитку комунікативних навичок і пізнавальної активності студентів. Отримані дані можуть бути використані для подальших досліджень і впровадження гейміфікованих підходів у викладанні інших математичних дисциплін.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: гейміфікація; математичний аналіз; навчання; мотивація.

ABSTRACT

The article presents the results of a study on the effectiveness of gamification elements in teaching Mathematical Analysis at the National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute". The research focuses on assessing the impact of gamified approaches on students' learning motivation, cognitive engagement, and the quality of their mastery of theoretical material among engineering students.

Formulation of the problem. Modern teaching of mathematical disciplines is characterized by a high level of abstraction, which often leads to decreased student motivation and superficial knowledge acquisition. In the context of the digitalization of the educational environment, there is a growing need to identify effective didactic tools that activate students' learning activities. This paper addresses the problem of the feasibility and effectiveness of implementing gamification in the teaching of mathematical analysis.

Materials and methods. Within the study, an original didactic game, entitled Mathematical Associations, was developed and implemented during practical classes in mathematical analysis. The experimental base consisted of first-year undergraduate student groups. The research employed pedagogical observation, questionnaires, analysis of students' learning activity, and assessment of task performance. Digital tools from Office 365 were used to organize feedback and collect responses.

Results. The results indicate increased student engagement in the learning process, greater interest in the course, and improved understanding of the key topics in mathematical analysis. Enhanced communication within academic groups and increased learning activity among the majority of participants were observed. At the same time, a small proportion of students expressed a preference for traditional teaching methods.

Conclusion. The results of the study confirm the effectiveness of gamification in teaching mathematical analysis to increase learning motivation, develop communication skills, and stimulate students' cognitive activity. The findings may be used for further research and for implementing gamified approaches in teaching other mathematical disciplines.

KEYWORDS: gamification; mathematical analysis; learning; motivation.

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Лінник Г., Морачковська І. Використання елементів гейміфікації при викладанні математичного аналізу у ЗВО. *Фізико-математична освіта*, 2026. Том 41. № 2. С. 56-63. <https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i2-05>.

FOR CITATION: Linnik, H., & Morachkovska, I. (2026). Use of gamification elements in teaching mathematical analysis at higher education institutions. *Physical and Mathematical Education*, 41(2), 56-63. <https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i2-05>.

ВСТУП

Постановка проблеми. У сучасній практиці викладання університетських фундаментальних курсів часто спостерігається тенденція до надмірної академічності: матеріал подається сухо, складною науковою мовою, що ускладнює його сприйняття студентами. Як результат, більшість здобувачів освіти засвоює зміст поверхнево, не вникаючи в сутність ключових понять, визначень, властивостей та теорем. Це призводить до формального запам'ятовування без глибокого розуміння логіки та взаємозв'язків між елементами навчального матеріалу.

Додатковою проблемою є обмежена кількість навчальних годин, відведених на викладання курсу. Цей часовий дефіцит не дозволяє викладачеві детально та поступово пояснити всі аспекти теми, а студентам – осмислити й закріпити знання. У таких умовах виникає потреба у пошуку альтернативних підходів, які б допомогли повторити та узагальнити основні поняття в більш доступній, нестандартній формі.

Також важливим завданням є аналіз результатів навчання: наскільки студенти зрозуміли матеріал, які прогалини залишилися, які теми потребують додаткового пояснення. Завершення курсу – слушний момент для того, щоб нагадати ключові теми, прояснити складні моменти та сформувані цілісне уявлення про пройдений матеріал. Такий підхід не лише підвищує якість засвоєння знань, а й сприяє розвитку критичного мислення та здатності застосовувати теоретичні положення на практиці.

Аналіз актуальних досліджень. У сучасних дослідженнях з педагогіки вищої освіти як один із ефективних інструментів підвищення мотивації здобувачів освіти, активізації їхньої пізнавальної діяльності та залучення до навчального процесу розглядається гейміфікація. Цей підхід набуває особливої актуальності під час викладання фундаментальних дисциплін, зокрема математичного аналізу, які характеризуються високим рівнем абстрактності та значним когнітивним навантаженням.

У роботі Імерідзе, Бикова та Величка (Імерідзе та ін., 2020) гейміфікація визначається як інтеграція ігрових механізмів у неігрове освітнє середовище з метою досягнення конкретних освітніх результатів. Автори підкреслюють, що застосування гейміфікації у закладах вищої освіти сприяє зростанню навчальної мотивації студентів, формуванню відповідальності за результати навчання та розвитку навичок самостійної роботи. Для курсу «Математичний аналіз», у якому успішне засвоєння матеріалу значною мірою залежить від систематичної роботи студентів та їхньої активної участі у навчальному процесі, зазначені ефекти є особливо важливими.

У працях Арістової та Махович (2024) ґрунтовно проаналізовано теоретичні аспекти гейміфікації в українському педагогічному просторі. Дослідники наголошують, що гейміфікація не є заміною традиційного навчання, а виступає інструментом його педагогічного підсилення. Такий підхід дозволяє адаптувати гейміфіковані елементи до різних навчальних дисциплін, зокрема до математичних курсів, де вони можуть використовуватися для структурування навчального матеріалу, поетапного контролю знань та формування позитивної навчальної мотивації.

У роботі Мехед (2024) доводить, що використання гейміфікації у вищій освіті сприяє формуванню ключових і професійних компетентностей студентів, розвитку критичного мислення та здатності до аналізу. Зазначені результати мають безпосереднє значення для вивчення математичного аналізу, оскільки ця дисципліна формує аналітичне мислення, логічну культуру та навички абстрактного моделювання.

У роботі Савіцької та Кричківської (2022) детально розглянуто практичні аспекти впровадження гейміфікації у навчальний процес. Акцент зроблено на використанні механік PBL (points, badges, leaderboards). Автори показують, що такі механізми ефективно працюють у середовищі закладів вищої освіти та можуть бути інтегровані в курси з чіткою структурою та системою оцінювання. Для курсу «Математичний аналіз» використання PBL-механік є доцільним під час організації поточного контролю, виконання індивідуальних розрахункових завдань і самостійної роботи студентів.

Дослідження Захарової та Грузд (2017) демонструє загальні принципи гейміфікації у вищій освіті, зосереджуючи увагу на покращенні якості освітніх послуг через використання ігрових механізмів, що може бути перенесено й на курси математичної освіти.

У статті Постернак, Токменко та Яницька (2023) показують, що впровадження ігрових технологій сприяє активізації пізнавальної діяльності студентів, підвищенню їхньої мотивації та якості засвоєння складного теоретичного матеріалу. Отримані результати є важливими і для курсу математичного аналізу, оскільки ця дисципліна характеризується високим рівнем абстрактності та потребує систематичної роботи з практичними завданнями.

У публікації Павленка (2024) представлено практикоорієнтований підхід до гейміфікації навчального процесу. Гейміфікація розглядається як інструмент підвищення залученості здобувачів освіти та створення позитивного навчального середовища. Автор наголошує на важливості продуманого добору ігрових елементів залежно від цілей навчання та специфіки дисципліни. Для курсу «Математичний аналіз» це означає необхідність використання гейміфікації не як розважального компонента, а як засобу структурування матеріалу, поетапного контролю знань і стимулювання регулярної навчальної діяльності студентів.

Хоча більшість досліджень стосуються загальних педагогічних предметів, існує кілька робіт, що стосуються саме математики як навчальної дисципліни. Зокрема застосуванню гейміфікації безпосередньо у навчанні математики присвячені дослідження Жерновникової, Шешуряк, Візіренко, Фалько (2024). Автори аналізують можливості використання гейміфікованих елементів у математичних дисциплінах і зазначають, що ігрові механізми сприяють зниженню навчальної тривожності та підвищенню зацікавленості студентів у вивченні складного матеріалу. Ці результати

підтверджують доцільність адаптації гейміфікації до курсу математичного аналізу з урахуванням його змістових і методичних особливостей.

У роботі Зінченко (2024) описує гейміфікацію як засіб підвищення ефективності навчання на уроках математики. Автор підкреслює, що ігрові методи допомагають знайти «спільну мову» з сучасними студентами та створити активне освітнє середовище.

Проблему гейміфікації безпосередньо у процесі навчання математики розглянуто також у роботі Зайцевої (2021). Авторка аналізує можливості використання гейміфікованих елементів в умовах змішаного навчання та зазначає, що поєднання традиційних методів з ігровими механіками сприяє підвищенню зацікавленості студентів, формуванню стійкої навчальної мотивації та розвитку навичок самостійної роботи. Особливу увагу приділено ролі гейміфікації у засвоєнні складних математичних понять, що безпосередньо корелює із завданнями курсу «Математичний аналіз», де важливим є поступове формування теоретичних уявлень і вміння застосовувати їх на практиці.

Результати довготривалого експериментального дослідження обговорюються у роботі Putz, Hofbauer, & Treiblmaier (2020). Автори досліджують, як можна покращити запам'ятовування знань студентів середніх та вищих навчальних закладів за допомогою гейміфікованих семінарів.

У роботі Camacho-Sánchez, Rillo-Albert, Lavega-Burgués (2022) досліджується вплив поєднання гейміфікації на академічну успішність і мотивацію студентів університету. Результати показують, що такий підхід сприяє підвищенню навчальних результатів студентів порівняно з традиційними методами.

Baldrich, Pérez-García, Domínguez-Oller & de Amo Sánchez-Fortún (2024) аналізують застосування гейміфікації, зокрема у вищій освіті та професійному навчанні. Автори доводять, що гейміфікація позитивно впливає на розуміння навчального змісту, внутрішню мотивацію та академічні результати студентів, особливо у змішаних форматах навчання. Водночас були виявлені такі проблеми, як можлива надмірна залежність від розважальних елементів, що може змістити фокус з основної освітньої мети.

У дослідженні Lamprououlos & Sidiropoulos (2024) порівнювали результати навчання студентів у різних умовах: традиційному, онлайн і з гейміфікацією. Виявлено, що гейміфікація підвищує не лише мотивацію та залученість, але й успішність, особливо в онлайн-форматах. У роботі підкреслюється важливість інтегрування елементів гри з освітніми цілями, а не просто додавання розважальних механік.

У роботі Voom-Cárcamo, Buelvas-Gutiérrez, Acosta-Oñate & Voom-Cárcamo (2024) досліджено поєднання гейміфікації з проблемно-орієнтованим навчанням як підхід до підвищення креативності та навичок вирішення задач у студентів при вивченні математики в університеті. Експериментальні дані показують, що така інтеграція значно покращує аналітичне мислення, мотивацію та середню успішність учасників порівняно з традиційною методикою. Автори також підкреслюють, що студентське сприйняття ігрових завдань у навчальному контексті сприяє більш активній участі та глибшому розумінню математичного змісту.

Ефективність інтеграції таких ігрових елементів, як бали, значки та таблиці лідерів, у навчальні процеси досліджують Sinha, Trivedi, Mandal & Dubey (2025). Аналіз даних підтверджує значне збільшення зацікавленості студентів, активності та кращого засвоєння матеріалу в умовах гейміфікованих курсів. Водночас автори зазначають необхідність уваги до балансу між гейміфікацією та змістом навчання.

Таким чином, аналіз наукових джерел свідчить про значний потенціал гейміфікації як інструменту модернізації навчального процесу у закладах вищої освіти. Дослідження також підтверджують ефективність використання гейміфікованих елементів під час дистанційного та змішаного навчання, оскільки вони сприяють підвищенню мотивації студентів, активізації їхньої пізнавальної діяльності та підтримці постійного зворотного зв'язку в онлайн-середовищі. Використання цифрових платформ, інтерактивних завдань і елементів змагання дозволяє частково компенсувати обмеження дистанційної взаємодії та забезпечити більшу залученість здобувачів освіти до навчального процесу. Водночас питання системного впровадження гейміфікованих підходів саме у викладанні математичного аналізу у закладах вищої освіти залишається недостатньо дослідженим, що визначає актуальність подальших наукових розробок у цьому напрямі.

Мета статті. Мета дослідження полягає у перевірці ефективності використання гейміфікаційних елементів у процесі вивчення дисципліни «Математичний аналіз». Для досягнення мети було розроблено та впроваджено у навчальний процес авторську дидактичну гру «Математичні асоціації», проведено аналіз її впливу на рівень навчальної мотивації, пізнавальної активності, залученості студентів і якості засвоєння навчального матеріалу.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У роботі було використано комплекс теоретичних та емпіричних методів. Певедено аналіз науково-методичної літератури, педагогічне спостереження та застосовано проєктувальний метод під час розроблення дидактичної гри «Математичні асоціації». Для збору й обробки даних використовувалися анкетування, цифрові інструменти Microsoft Forms та кількісний аналіз результатів виконання завдань.

У дослідженні було використано комплекс теоретичних та емпіричних методів, спрямованих на оцінювання ефективності впровадження гейміфікаційних елементів у навчальний процес. Експеримент проведено у 2024–2025 навчальному році серед студентів першого курсу спеціальностей комп'ютерного та технічного профілю. Загальна кількість учасників – 82 студенти (7 академічних груп). Експеримент складався з трьох етапів:

- діагностичний етап — виявлення рівня розуміння базових понять математичного аналізу до гри;
- основний етап — проведення гри «Математичні асоціації» у форматі онлайн;
- контрольний етап — анкетування студентів.

Методи збору даних:

- педагогічне спостереження;

- кількісний аналіз результатів виконання завдань;
 - анкетування (оцінка мотивації та інтересу);
 - порівняльний аналіз результатів «до» і «після».
- Критерії оцінювання:
- рівень правильності відповідей (у відсотках (%), за кожною картою гри);
 - швидкість пошуку відповідностей;
 - ступінь залученості студентів (за результатами анкети);
 - суб'єктивна оцінка складності та інтересу (5-бальна шкала).

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Під час участі у міжнародній школі-семінарі «Сучасні педагогічні технології в освіті» автори зацікавилися доповіддю «Розробка та впровадження професійних ігор та тренажерів в навчальний процес» професора Ігора Хоменка (НТУ "ХПІ"). У доповіді було запропоновано урізноманітнити викладання для студентів електроенергетичних спеціальностей за допомогою дидактичної гри типу Меморі. Представлена ідея здалася привабливою з огляду на простоту реалізації та потенціал для активізації пізнавальної діяльності студентів. Однак автори поставили за мету розробити більш складний і змістовно насичений ігровий формат, адаптований до специфіки математичних дисциплін.

Насамперед було визначено ціль гри – повторення та систематизація матеріалу курсу «Математичний аналіз», перевірка розуміння основних понять і встановлення змістових зв'язків між ними у доступній та мотиваційно привабливій формі. Для реалізації цієї мети було відібрано завдання з базових тем курсу, зокрема: границя функції, похідна та інтеграл. Важливим принципом відбору змісту стала орієнтація не лише на відтворення формальних означень або алгоритмів, а й на усвідомлення їх математичного змісту.

У результаті було створено 9 пар карток (рис.1), пов'язаних між собою не очевидним співвідношенням типу «приклад – відповідь», а глибшим внутрішнім зв'язком, який потребує логічного аналізу, асоціативного мислення та розуміння теоретичних основ. Такий підхід сприяв розвитку аналітичних здібностей студентів і стимулював їх до активного обговорення та колективного пошуку правильних відповідей. Наприклад, границя з картки Е відповідає картці 1, де записано означення границі послідовності, яка прямує до 5, як і послідовність з картки Е.

Гейміфікація навчання математики – це використання ігрових елементів (гри) в неігрових процесах при вивченні математичних фактів. Для якісного впровадження гейміфікації необхідно визначити її цілі, засоби та прийоми. Мета гейміфікації – перевірка або здобуття знань дослідним шляхом, що супроводжується підвищеним інтересом до навчання. Використання гри розвиває не тільки математичні компетентності, а й уважність, уміння спілкуватися, комунікувати, лідерські якості, розширює кругозір. Умовами організації гейміфікації, дотримання яких дасть змогу здобути максимального позитивний навчальний ефект, є такі:

1. Тісний зв'язок гри з матеріалом курсу.

Запропонована гра містить завдання, спрямовані на перевірку глибокого розуміння базових понять математичного аналізу.

2. Цікавість гри для студентів.

Завдання подаються в різноманітних і нестандартних формах: схеми, рисунки та графіки, що підвищує зацікавленість і мотивацію здобувачів освіти.

3. Наявність системи заохочень як компонента змагання. Переможцям нараховуються додаткові бали за курс, які враховуються при виставленні підсумкової оцінки, що стимулює активну участь студентів.

4. Чітко визначені навчальні цілі гри.

Кожен елемент гри спрямований на засвоєння конкретних знань або навичок. Кожне завдання відповідає одній з основних тем курсу: границі, похідні, інтеграли. Щоб дати правильну відповідь, студент повинен розуміти внутрішній зв'язок між теорією та практикою.

5. Простота правил та зрозумілість механіки.

Правила гри є інтуїтивно зрозумілими, що дозволяє студентам зосередитися на навчальному змісті, а не на складних інструкціях. Основне завдання полягає в пошуку пари карток, які відповідають одна одній, при цьому правило відповідності не задається явно і має бути встановлене самостійно на основі опанованого матеріалу.

6. Можливість командної взаємодії.

Залучення елементів співпраці та командної роботи підвищує мотивацію та розвиває комунікативні навички. В онлайн-форматі така можливість обмежена, тоді як в офлайн-варіанті студенти можуть обговорювати між собою можливі варіанти поєднання карток з метою знаходження оптимальної пари.

7. Адаптивність гри до рівня підготовки студентів.

Завдання мають бути посилюючими для студентів різного рівня підготовки, але водночас стимулювати розвиток. Передбачено завдання різної складності, а також можливість модифікації змісту залежно від навчальних потреб групи.

8. Зворотний зв'язок у процесі гри.

Оперативне інформування студентів про правильність відповідей і досягнутий прогрес сприяє ефективному закріпленню знань. В онлайн-форматі студенти заповнювали форму (Microsoft Forms), де вказували знайдені пари. Після завершення часу результати ставали одразу доступними. Надалі проводилося спільне обговорення правильних відповідей і встановлених зв'язків між картками (за участю як студентів, так і викладача).

9. Баланс між змаганням і навчанням.

Гра не повинна перетворюватися на суто спортивне суперництво, а залишатися допоміжним освітнім інструментом.

10. Інтеграція цифрових технологій (за можливості).

Використання онлайн-платформ і цифрових інструментів робить навчальний процес більш сучасним і зручним. Зокрема, у ході гри застосовувалася платформа Microsoft Forms (Office 365), що було описано в пункті 8.

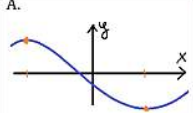
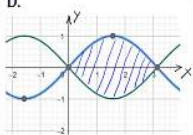
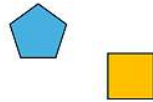
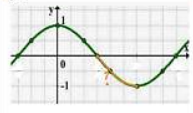
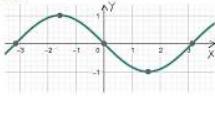
1. $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \forall n > N_\varepsilon$ $ x_n - 5 < \varepsilon.$	2. $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{10a^2 + a - 3}{2a^2 - 3a + 9};$ $\lim_{b \rightarrow 3} \frac{2(b-3)}{\sqrt{b-2}-1}.$	3. $\int_0^\pi \sin x dx.$
4. $\alpha = \bar{o}(\beta)$ у точці 0.	5. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x_0 + \Delta x) - \cos x_0}{\Delta x}.$	6. $f'(x_0) = 0.$
7. $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx.$	8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+0} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+n} \right)$	9. $\int_{\pi/2}^\pi \sqrt{1 + \sin^2 x} dx$
A. 	B. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$	C. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\ln(1+x)}.$
D. 	E. $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2 - 5k^3}{7 - k^3}.$	F. 
G. 	H. 	I. $\int_0^1 e^{-x^2} dx.$

Рис. 1. Приклад карток до гри «Математичні асоціації»

Джерело: авторська розробка

Варіанти гри:

1. Офлайн-формат. Перемішати всі картки (18 штук) та всім студентам видати по 1 картці. Через 10 хвилин всі повинні розбитися на пари. Якщо всі пари правильно утворені, то вся група виграла, в іншому випадку – програла.

2. Онлайн-формат. На екран виводяться всі картки (18 штук) у змішаному порядку. Кожен намагається знайти якомога більше пар. Через 10 хвилин всі одночасно надсилають свої пропозиції. Виграє студент, який знайшов найбільшу кількість правильних пар.

3. Онлайн-формат (полегшений варіант 2). Демонструються два стовпці з картками (по 9 в кожному), Потрібно поставити у відповідність кожній картці з лівого стовпця карту з правого стовпця.

Також було перевірено, як у цю гру міг би зіграти штучний інтелект. Для експерименту використано інструмент Copilot, результати роботи якого засвідчили встановлення лише трьох правильних пар із дев'яти можливих. Отриманий результат свідчить про те, що успішне виконання ігрового завдання потребує не лише формального зіставлення інформації, а й глибокого розуміння математичного змісту та встановлення прихованих логічних зав'язків між поняттями. Таким чином, застосування штучного інтелекту в даному випадку не є ефективним інструментом для досягнення перемоги в цій грі та не замінює самостійної інтелектуальної діяльності студентів. На завершальному етапі було здійснено узагальнення й аналіз отриманих результатів, що дало змогу оцінити доцільність і перспективи використання розробленої гри в освітньому процесі.

Таблиця 1. Результати гри студентів груп ІКМ 224 а, б, в, г, д, п, к

№ картки	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Відсоток правильних відповідей	64%	36%	79%	11%	9%	45%	50%	33%	11%

Джерело: авторська розробка

В таблиці наведено відсоток правильних відповідей залежно від номера картки завдання. Не дуже високі результати пов'язані з нестандартним типом завдань. На практиці розв'язуються задачі з однієї теми, найчастіше питання: знайти границю, знайти похідну або обчислити інтеграл. Тут питання не ставиться, студент повинен знайти внутрішній зв'язок між картками. Найгірші результати: 4 – порівняння нескінченно малих, ця тема складана зазвичай; 5 – потрібно

побачити, що це означення похідної і знайти її, тут виявлено таку проблему: студенти знаходять похідну за властивостями чи таблицею та не усвідомлюють змісту; 9 – студенти звикли до того, що інтеграл завжди обчислюємо, а тут просто наведена формула для довжини кривої і обчислювати не потрібно, тільки зрозуміти, довжина якої кривої шукається. Найкращі результати: 1 та 3 - границя послідовності та геометричний зміст інтеграла – ці теми розуміють краще.

Результати дослідження підтверджують позитивний вплив гейміфікації на якість засвоєння матеріалу з математичного аналізу. Порівняння результатів тестування «до» і «після» впровадження гри показало:

- підвищення правильності відповідей у середньому на 23%;
- зростання інтересу до дисципліни за даними анкети – на 41%;
- зниження частки студентів з низькою мотивацією з 28% до 14%;
- вищу навчальну активність (кількість піднятих рук, участь у дискусії +37%).

Аналітичний огляд результатів за картками засвідчив, що найнижчі показники були у завданнях, пов'язаних із похідною та порівнянням нескінченно малих – саме тих темах, де студенти зазвичай спираються на алгоритмічне виконання, а не на розуміння змісту.

Було перевірено нульову статистичну гіпотезу $H_0: \mu = 50\%$ щодо відсутності відмінності між середнім відсотком правильних відповідей та значенням 50% (двобічна перевірка). За результатами одновибіркового t-тесту статистично значущих відмінностей від 50% не виявлено ($p = 0.169$). Водночас оцінка ефекту свідчить про наявність тенденції до зниження середнього результату відносно 50%. Слід також зазначити, що довірчий інтервал є досить широким, що зумовлено невеликим обсягом вибірки ($n = 9$).

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

У статті досліджено можливості використання гейміфікації у процесі викладання курсу «Математичний аналіз» у закладах вищої освіти. Було розроблено авторську дидактичну гру «Математичні асоціації», спрямовану на повторення, систематизацію та осмислення ключових понять математичного аналізу. Запропонований ігровий формат орієнтований не на механічне відтворення знань, а на встановлення змістових зв'язків між математичними поняттями, що сприяє розвитку логічного й асоціативного мислення студентів.

Результати педагогічного експерименту засвідчили, що використання ігрових завдань сприяє активізації пізнавальної діяльності студентів, підвищенню їхньої навчальної мотивації та залученості до освітнього процесу. Порівняння результатів до та після проведення гри показало підвищення правильності відповідей у середньому на 23%, зростання інтересу до дисципліни та збільшення навчальної активності студентів. Аналіз виконання окремих завдань дозволив виявити теми, які викликають найбільші труднощі, зокрема порівняння нескінченно малих і розуміння означення похідної, що свідчить про схильність студентів до алгоритмічного виконання завдань без достатнього осмислення теоретичного змісту.

Проведена статистична перевірка нульової гіпотези щодо відповідності середнього результату значенню 50% не виявила статистично значущих відмінностей ($p = 0.169$), що частково пояснюється невеликим обсягом вибірки та складністю запропонованих завдань. Водночас отримані дані демонструють тенденцію до поглиблення розуміння навчального матеріалу та підтверджують потенціал гейміфікації як інструменту діагностики рівня сформованості математичних компетентностей.

Отже, результати дослідження підтверджують доцільність використання гейміфікованих дидактичних інструментів у викладанні математичного аналізу. Запропонована гра може застосовуватися як засіб повторення та узагальнення навчального матеріалу, діагностики рівня розуміння ключових понять і активізації навчальної діяльності студентів. Перспективи подальших досліджень полягають у розширенні вибірки учасників експерименту, удосконаленні структури ігрових завдань та розробленні інших гейміфікованих методик для викладання математичних дисциплін у змішаному та дистанційному форматах навчання.

На основі отриманих результатів доцільно рекомендувати викладачам математичного аналізу та вищої математики впроваджувати ігрові вправи для повторення та систематизації навчального матеріалу. Використання ігрових механік може також слугувати ефективним інструментом діагностики розуміння складних тем курсу. Крім того, важливим є застосування зворотного зв'язку в реальному часі, що сприяє підвищенню ефективності навчального процесу та активізації пізнавальної діяльності студентів.

Підсумовуючи, можна сказати, що гейміфікація навчання є невід'ємною складовою дидактики, а сучасні умови лише змінюють способи використання ігрових методів в освіті. Змішане навчання, потужний інформаційний потік та розвиток цифрових навичок вимагають від викладачів уміння адаптувати класичну дидактичну гру до нових реалій. Використання інтерактивних ігор дає змогу викладачу не лише зацікавити студентів у навчанні, зокрема під час вивчення математичних дисциплін, а й забезпечити ґрунтовне засвоєння знань і розвиток математичних компетентностей.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори заявляють про відсутність фінансових, особистих чи інших інтересів, що можуть розглядатися як потенційний конфлікт інтересів щодо публікації цієї статті.

ДЖЕРЕЛА ФІНАНСУВАННЯ

Роботу виконано за відсутності фінансової підтримки з боку будь-яких організацій.

ДОСТУПНІСТЬ ДАНИХ

Це дослідження не передбачало використання окремих наборів даних.

ВИКОРИСТАННЯ ЗАСОБІВ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Під час тестування розробленої гри було використано Microsoft 365 Copilot для знаходження 9 логічних пар. Також використано ChatGPT для поліпшення якості мови та перевірки граматики. Автори перевірили та відредагували отриманий контент і несуть повну відповідальність за його зміст.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

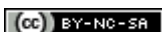
1. Арістова, Н. О., & Махович, І. А. (2024). Розуміння змісту і сутності поняття «гейміфікація» у науковому педагогічному просторі України. *Наукові інновації та передові технології*, 8 (36), 1058-1070. [https://doi.org/10.52058/2786-5274-2024-8\(36\)-1058-1070](https://doi.org/10.52058/2786-5274-2024-8(36)-1058-1070)
2. Жерновникова, О. Шешуряк, В., Візиренко, О., & Фалько, Д. (2024.) Запровадження гейміфікації у процес вивчення математики. В *Наумовські читання : матеріали XXI Всеукр. наук.-метод. конф. здобувачів вищ. освіти та молод. вчених, присвяч. 100-річчю до дня народж. І. О. Наумова, Харків. нац. пед. ун-т ім. Г. С. Сковороди*, 149-151.
3. Зайцева, О. І. (2021). Гейміфікація процесу навчання математики в умовах змішаного навчання. *Постметодика*, 1, 37–40.
4. Захарова, О. В., & Грузд, А. В. (2017). Підвищення якості послуг вищої освіти за допомогою гейміфікації. *Наукові праці Кіровоградського національного технічного університету. Економічні науки : зб. наук. пр. - Кропивницький : ЦНТУ*, 32, 113-122.
5. Зінченко, А. М. (2024). Гейміфікація як засіб підвищення ефективності навчання на уроках математики. В *Наука та освіта в дослідженнях молодих учених : матеріали V Міжнар. наук.-практ. конф., Харків. нац. пед. ун-т ім. Г. С. Сковороди*, 11–13.
6. Імерідзе, М., Биков, І., & Величко, Д. (2020). Використання гейміфікації в освітньому середовищі закладів вищої освіти. *Молодь і ринок*, 2 (181), 81-85. <https://doi.org/10.24919/2308-4634.2020.211897>
7. Мехед, К. М. (2020). Гейміфікація навчання як інноваційний засіб реалізації компетентнісного підходу у закладах вищої освіти. *Вісник Національного університету «Чернігівський колегіум» імені Т. Г. Шевченка. Серія: Педагогічні науки*, 7 (163), 19–22.
8. Павленко, О. (2024). Гейміфікація в освітньому процесі: як зробити уроки цікавими? URL: <https://oplatforma.com.ua/article/2687-geymfatsya-v-osvtnomu-protse-yak-zrobiti-uroki-tskavimi>
9. Постернак, Н., Токменко, І., & Яніцька, Л. (2023). Застосування гейміфікації під час проведення практичних занять з дисципліни «Медична біохімія». *Освіта. Інноватика. Практика*, 11(6), 13–21. <https://doi.org/10.31110/2616-650X-vol11i6-002>
10. Савіцька, В., & Кричківська, О. (2022). Гейміфікація вищої освіти: триєдність PBL як інструмент модернізації освітнього процесу. *Фізико-математична освіта*, 33(1), 43-47. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-033-1-007>
11. Baldrich, K., Pérez-García, C., Domínguez-Oller, J. C., & de Amo Sánchez-Fortún, J. M. (2024). *Gamified experiences in educational academic contexts: A systematic review. Qualitative Research in Education*, 13(3), 221 – 242. <https://doi.org/10.17583/qre.13552>
12. Boom-Cárcamo, E., Buevas-Gutiérrez, L., Acosta-Oñate, L., & Boom-Cárcamo, D. (2024). *Gamification and problem-based learning (PBL): Development of creativity in the teaching-learning process of mathematics in university students. Thinking Skills and Creativity*, 53, Article 101614. <https://doi.org/10.1016/j.tsc.2024.101614>
13. Camacho-Sánchez, R., Rillo-Albert, A., & Lavega-Burgués, P. (2022). Gamified Digital Game-Based Learning as a Pedagogical Strategy: Student Academic Performance and Motivation. *Applied Sciences*, 12(21), 11214. <https://doi.org/10.3390/app12211214>
14. Lampropoulos, G., & Sidropoulos, A. (2024). *Impact of gamification on students' learning outcomes and academic performance: A longitudinal study comparing online, traditional, and gamified learning. Education Sciences*, 14(4), 367. <https://doi.org/10.3390/educsci14040367>
15. Putz, L. M., Hofbauer, F., & Treiblmaier, H. (2020). *Can gamification help to improve education? Findings from a longitudinal study. Computers in Human Behavior*, 110, 106392. <https://doi.org/10.1016/j.chb.2020.106392>
16. Sinha, A., Trivedi, L. M., Mandal, S., & Dubey, C. K. (2025). *Gamification in education: Enhancing student engagement and learning outcomes. Journal of Informatics Education and Research*, 5(4). <https://doi.org/10.52783/jier.v5i4.3920>

REFERENCES (TRANSLATED AND transliterated)

1. Aristova, N. O., & Makhovych, I. A. (2024). Rozuminnia zmistu i sutnosti poniatia «heimifikatsiia» u naukovomu pedahohichnomu prostori Ukrainy [Understanding content and essence of concept of "gamification" in Ukrainian scientific pedagogical space]. *Naukovi innovatsii ta peredovi tekhnologii*, 8 (36), 1058-1070 [https://doi.org/10.52058/2786-5274-2024-8\(36\)-1058-1070](https://doi.org/10.52058/2786-5274-2024-8(36)-1058-1070) (in Ukrainian)
2. Zhernovnykova, O. Sheshuriak, V., Vizirenko, O., & Falko, D. (2024.) Zaprovdzhennia heimifikatsii u protses vyvchennia matematyky [introducing gamification into the process of learning mathematics]. In *Naumovski chytannia : materialy XXI vseukr. nauk.-metod. konf. zdobuvachiv vyshch. osvity ta molod. vchenykh, prysviach. 100-richchiu do dnia narodzh. I. O. Naumova, Kharkiv. nats. ped. un-t im. H. S. Skovorody*, 149-151. (in Ukrainian)
3. Zaitseva, O. I. (2021). Heimifikatsiia protsesu navchannia matematyky v umovakh zmishanoho navchannia [Gamification of the process of learning mathematics in the conditions of mixed learning]. *Postmetodyka*, 1, 37–40.
4. Zakharova, O. V., & Hruzd, A. V. (2017). Pidvyshchennia yakosti posluh vyshchoi osvity za dopomohoiu heimifikatsii [Improving the quality of higher education services through gamification]. *Naukovi pratsi Kirovohradskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu. Ekonomichni nauky : zb. nauk. pr. - Kropyvnytskyi : TsNTU*, 32, 113-122. (in Ukrainian)
5. Zinchenko, A. M. (2024). Heimifikatsiia yak zasib pidvyshchennia efektyvnosti navchannia na urokakh matematyky [Gamification as a means of increasing the effectiveness of learning in mathematics lessons]. In *Nauka ta osvita v doslidzhenniakh molodykh uchennykh : materialy V Mizhnar. nauk.-prakt. konf., Kharkiv. nats. ped. un-t im. H. S. Skovorody*, 11–13. (in Ukrainian)
6. Imeridze, M., Bykov, I., & Velychko, D. (2020). Vykorystannia heimifikatsii v osvithomu sere dovysychi zakladiv vyshchoi osvity [Use of gamification in the educational environment of higher education institutions]. *Molod i rynek*, 2 (181), 81-85. <https://doi.org/10.24919/2308-4634.2020.211897> (in Ukrainian)
7. Mekhed, K. M. (2020). Heimifikatsiia navchannia yak innovatsiinyi zasib realizatsii kompetentnisnoho pidkhodu u zakladakh vyshchoi osvity [Gamification of learning as an innovative means of implementing a competency-based approach in higher education institutions]. *Visnyk Natsionalnoho universytetu «Chernihivskiy kolehium» imeni T. H. Shevchenka. Seriya: Pedahohichni nauky*, 7 (163), 19–22. (in Ukrainian)
8. Pavlenko, O. (2024). *Heimifikatsiia v osvithomu protsesi: yak zrobyty uroky tsikavymy? [Gamification in the educational process: how to make lessons interesting?]. URL: https://oplatforma.com.ua/article/2687-geymfatsya-v-osvtnomu-protse-yak-zrobiti-uroki-tskavimi* (in Ukrainian)
9. Posternak, N., Tokmenko, I., & Yanitska, L. (2023). Zastosuvannia heimifikatsii pid chas provedennia praktychnykh zaniat z dystsypliny «Medychna biokhimii» [Application of gamification during practical lessons in the discipline "Medical biochemistry"]. *Osvita. Innovatyka. Praktyka – Education. Innovation. Practice*, 11(6), 13–21. <https://doi.org/10.31110/2616-650X-vol11i6-002> (in Ukrainian)

10. Savitska, V., & Krychivska, O. (2022). Higher education gamification: the trinity of pbl as a tool for educational process modernization. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, 33(1), 43-47. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-033-1-007> (in Ukrainian)
11. Baldrich, K., Pérez-García, C., Domínguez-Oller, J. C., & de Amo Sánchez-Fortún, J. M. (2024). *Gamified experiences in educational academic contexts: A systematic review. Qualitative Research in Education*, 13(3), 221 – 242. <https://doi.org/10.17583/qre.13552>
12. Boom-Cárcamo, E., Buelvas-Gutiérrez, L., Acosta-Oñate, L., & Boom-Cárcamo, D. (2024). *Gamification and problem-based learning (PBL): Development of creativity in the teaching-learning process of mathematics in university students. Thinking Skills and Creativity*, 53, Article 101614. <https://doi.org/10.1016/j.tsc.2024.101614>
13. Camacho-Sánchez, R., Rillo-Albert, A., & Lavega-Burgués, P. (2022). Gamified Digital Game-Based Learning as a Pedagogical Strategy: Student Academic Performance and Motivation. *Applied Sciences*, 12(21), 11214. <https://doi.org/10.3390/app122111214>
14. Lampropoulos, G., & Sidiropoulos, A. (2024). *Impact of gamification on students' learning outcomes and academic performance: A longitudinal study comparing online, traditional, and gamified learning. Education Sciences*, 14(4), 367. <https://doi.org/10.3390/educsci14040367>
15. Putz, L. M., Hofbauer, F., & Treiblmaier, H. (2020). *Can gamification help to improve education? Findings from a longitudinal study. Computers in Human Behavior*, 110, 106392. <https://doi.org/10.1016/j.chb.2020.106392>
16. Sinha, A., Trivedi, L. M., Mandal, S., & Dubey, C. K. (2025). *Gamification in education: Enhancing student engagement and learning outcomes. Journal of Informatics Education and Research*, 5(4). <https://doi.org/10.52783/jier.v5i4.3920>

| Матеріал надійшов до редакції: 06.02.2026 р. | Прийнято до друку: 21.03.2026 р. | Опубліковано: 30.04.2026 р. |



КЛАСИФІКАЦІЯ ЗАСОБІВ ПІДТРИМУВАННЯ МОБІЛЬНОГО НАВЧАННЯ В ЗАКЛАДАХ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ

Юлія НОСЕНКО

Інститут цифровізації освіти НАПН України, Україна
nosenko-y@ukr.net
<https://orcid.org/0000-0002-9149-8208>

CLASSIFICATION OF MOBILE LEARNING SUPPORT TOOLS IN GENERAL SECONDARY EDUCATION

Yuliia NOSENKO

The Institute for Digitalisation of Education
of NAES of Ukraine, Ukraine
nosenko-y@ukr.net
<https://orcid.org/0000-0002-9149-8208>

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. Сучасний розвиток цифрових технологій зумовлює активне впровадження мобільного навчання у закладах загальної середньої освіти, що забезпечує доступ до освітніх ресурсів у будь-який час і в будь-якому місці. Водночас зростання кількості мобільних застосунків і цифрових сервісів актуалізує проблему їх обґрунтованого добору та систематизації. У науковій літературі відсутній єдиний підхід до класифікації засобів підтримання мобільного навчання, що ускладнює їх ефективне використання в освітньому процесі.

Матеріали і методи. Дослідження ґрунтується на застосуванні теоретичних методів науково-педагогічного аналізу. Здійснено огляд і узагальнення наукових праць вітчизняних і зарубіжних дослідників, проаналізовано публікації, індексовані у базах Scopus і Web of Science. Використано методи систематизації, порівняння та узагальнення для впорядкування засобів підтримання мобільного навчання та визначення їх ролі в освітньому процесі.

Результати. Встановлено, що засоби підтримання мобільного навчання доцільно розглядати як складові цифрового освітнього середовища, що забезпечують реалізацію основних компонентів навчальної діяльності учнів. Визначено їх ключові дидактичні функції: подання навчального матеріалу, організація взаємодії, управління навчальною діяльністю, виконання практичних і дослідницьких завдань, контроль і оцінювання результатів, підтримка мотивації, а також пошук і опрацювання інформації. На цій основі розроблено класифікацію засобів підтримання мобільного навчання, що включає інформаційно-освітні, комунікаційні, організаційно-управлінські, контрольні-оцінювальні, інструменти створення контенту, дослідницькі та практико-орієнтовані, гейміфіковані та довідково-інформаційні засоби.

Висновки. Запропонована класифікація забезпечує систематизацію мобільних засобів відповідно до їх провідної ролі у структурі навчальної діяльності та створює підґрунтя для їх педагогічно обґрунтованого використання в закладах загальної середньої освіти. Її практична цінність полягає у можливості цілеспрямованого добору цифрових інструментів відповідно до дидактичної мети навчання та структури уроку, що сприяє підвищенню ефективності освітнього процесу в умовах цифровізації.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: мобільне навчання; цифрові технології; заклади загальної середньої освіти; засоби навчання; класифікація; мобільні застосунки.

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Носенко Ю. Класифікація засобів підтримання мобільного навчання в закладах загальної середньої освіти. *Фізико-математична освіта*, 2026. Том 41. № 2. С. 64-70. <https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i2-06>.

ABSTRACT

Formulation of the problem. The contemporary development of digital technologies has led to the widespread implementation of mobile learning in general secondary education institutions, providing access to educational resources anytime, anywhere. At the same time, the growing number of mobile applications and digital services highlights the need for their justified selection and systematization. The scientific literature lacks a unified approach to classifying mobile learning support tools, which complicates their effective use in the educational process.

Materials and methods. The study is based on the application of theoretical methods of scientific and pedagogical analysis. A review and generalization of scientific works by Ukrainian and foreign researchers were carried out, and publications indexed in Scopus and Web of Science databases were analyzed. Methods of systematization, comparison, and generalization were used to organize mobile learning support tools and determine their role in the educational process.

Results. It has been established that mobile learning support tools should be considered as components of a digital educational environment that ensure the implementation of the main components of students' learning activities. Their key didactic functions have been identified, including the presentation of learning content, organization of interaction, management of learning activities, implementation of practical and research tasks, control and assessment of learning outcomes, support of student motivation, and information search and processing. On this basis, a classification of mobile learning support tools has been developed, including informational-educational, communication, organizational-management, assessment, content creation, research and practice-oriented, gamified, and reference-information tools.

Conclusions. The proposed classification ensures the systematization of mobile tools according to their leading role in the structure of learning activities and provides a basis for their pedagogically grounded use in general secondary education institutions. Its practical value lies in enabling the purposeful selection of digital tools in line with the didactic goals of learning and the structure of a lesson, thereby improving the effectiveness of the educational process in the context of digitalization.

KEYWORDS: mobile learning; digital technologies; general secondary education institutions; learning tools; classification; mobile applications.

FOR CITATION: Nosenko, Yu. (2026). Classification of mobile learning support tools in general secondary education. *Physical and Mathematical Education*, 41(2), 64-70. <https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i2-06>.

ВСТУП

Формулювання проблеми. Сучасний етап розвитку освіти характеризується активним упровадженням цифрових технологій в освітній процес, що зумовлює трансформацію традиційних підходів до організації навчання. Особливого значення набуває мобільне навчання (mobile learning), яке забезпечує доступ до освітніх ресурсів у будь-який час і в будь-якому місці, сприяє індивідуалізації навчальної діяльності учнів та розширює можливості їхньої взаємодії в цифровому освітньому середовищі.

У закладах загальної середньої освіти (ЗЗСО) мобільне навчання набуває дедалі більшого поширення, що зумовлено широким використанням учнями мобільних пристроїв (смартфонів, планшетів) та розвитком відповідних освітніх платформ і сервісів. Водночас ефективність його реалізації значною мірою залежить від обґрунтованого добору та використання засобів підтримання мобільного навчання, які забезпечують доступ до навчального контенту, організацію комунікації, контроль і оцінювання результатів навчання.

На відміну від закладів вищої освіти, де мобільне навчання значною мірою базується на принципах автономності та самостійної діяльності здобувачів, у ЗЗСО воно реалізується в умовах педагогічно керованого освітнього процесу. Учні шкільного віку потребують більш чіткої структуризації навчальної діяльності, дидактично обґрунтованого добору цифрових засобів, а також урахування вікових особливостей сприйняття інформації та рівня сформованості цифрових компетентностей. Це зумовлює специфіку мобільного навчання у ЗЗСО, яка проявляється у необхідності педагогічного супроводу, регламентованості освітнього процесу та обмеженнях щодо використання мобільних пристроїв.

У зв'язку з цим використання загальних або адаптованих класифікацій мобільного навчання, розроблених для інших рівнів освіти, не забезпечує належної педагогічної ефективності та потребує уточнення з урахуванням специфіки шкільного освітнього середовища. Це визначає потребу у спеціально адаптованих підходах до добору та систематизації засобів підтримання мобільного навчання, які враховують дидактичні цілі, структуру уроку та рівень сформованості цифрових компетентностей учнів.

Незважаючи на значну кількість досліджень, присвячених мобільному навчання, питання систематизації та класифікації засобів його підтримання у шкільній освіті залишаються недостатньо розробленими. У науковій літературі відсутній єдиний підхід до визначення складу таких засобів, їх функціонального призначення та дидактичних можливостей, що ускладнює їх ефективне використання в освітньому процесі.

Таким чином, виникає потреба в теоретичному обґрунтуванні та розробленні класифікації засобів підтримання мобільного навчання саме у ЗЗСО, що забезпечить системність їх використання з урахуванням вікових, педагогічних і організаційних особливостей навчальної діяльності учнів та сприятиме підвищенню ефективності освітнього процесу.

Аналіз актуальних досліджень. Проблематика мобільного навчання в останні роки є однією з провідних у сфері цифровізації освіти. Сучасні дослідження охоплюють широкий спектр аспектів: від ефективності мобільного навчання до класифікації інструментів, педагогічних моделей і факторів впровадження.

Систематичний огляд понад 160 досліджень, проведених у 2016–2022 рр., демонструє стрімке зростання кількості досліджень мобільного навчання та його трансформаційний вплив на освітній процес (Naveed, 2023). Мобільне навчання забезпечує інтеграцію онлайн- і офлайн-середовищ, підтримує співпрацю, мікронавчання, активно інтегрується з технологіями доповненої реальності та гейміфікації.

В останніх систематичних оглядах також підкреслюється, що мобільне навчання стає ключовим чинником модернізації освіти, забезпечуючи доступність і гнучкість освітнього процесу, а також сприяючи формуванню індивідуальних освітніх траєкторій (Garzón, 2025). Дослідники відзначають, що мобільні технології створюють умови для активної взаємодії, співпраці та спільного створення навчального контенту, що суттєво підвищує ефективність навчання (Lazago, 2023).

Окремий напрям сучасних досліджень пов'язаний із вивченням структури та класифікації мобільного навчання. У ряді робіт запропоновано класифікувати мобільне навчання за такими параметрами, як тип пристроїв, освітнє середовище, педагогічний підхід та результати навчання (Garzón, 2025). Інші дослідження пропонують класифікацію функціональностей мобільного навчання (комунікація, створення контенту, оцінювання), що свідчить про наявність різних підходів до систематизації засобів (Moysa, 2024).

Важливим напрямом є також дослідження конкретних засобів мобільного навчання, зокрема мобільних застосунків, гейміфікованих платформ, AR/VR-технологій та адаптивних систем. Сучасні дослідження також акцентують увагу на необхідності оцінювання якості мобільних освітніх застосунків для учнів шкільного віку, зокрема за критеріями педагогічної доцільності, інтерактивності, адаптивності та безпечності (Papadakis, 2021). Дослідження мобільних навчальних застосунків свідчать про їх використання як у класі, так і поза ним для організації співпраці та автономного навчання.

У роботах останніх років значна увага приділяється інноваційним технологіям у мобільному навчанні, таким як штучний інтелект, доповнена реальність і мобільні ігрові середовища. Дослідження показують, що інтеграція таких технологій розширює функціональні можливості мобільного навчання та потребує нових підходів до класифікації відповідних засобів (Moysa, 2024). Крім того, сучасні дослідження зосереджуються на факторах впровадження мобільного навчання, зокрема технологічних, педагогічних і соціокультурних. Зокрема, встановлено, що ефективність мобільного навчання залежить від рівня цифрової компетентності учнів і вчителів, особливостей освітнього середовища та моделей прийняття технологій (Valencia-Agias, 2024). Важливим є також напрям досліджень, пов'язаний із предметною специфікою мобільного навчання. Наприклад, огляд мобільного навчання у природничих дисциплінах показав, що мобільні технології сприяють візуалізації складних понять, організації практичної діяльності та підвищенню мотивації учнів (Sangur, 2025).

Бібліометричні дослідження свідчать про стійку тенденцію до зростання кількості публікацій із мобільного навчання та розширення тематичних напрямів, що підтверджує актуальність цієї проблематики та її міждисциплінарний характер.

У вітчизняній науковій традиції вже тривалий час досліджуються питання цифрової трансформації освіти, розвитку ІКТ-компетентності та впровадження мобільного навчання у закладах освіти (Биков, 2013; Кривонос, 2023; Письменна, 2021; Прохоренко, 2023; Yefremenko et al., 2025). Водночас у більшості робіт основна увага приділяється

загальним аспектам цифровізації або використанню окремих інструментів, тоді як проблема системної класифікації засобів підтримання мобільного навчання залишається недостатньо розробленою.

Таким чином, аналіз сучасних досліджень свідчить про те, що мобільне навчання є одним із ключових напрямів розвитку цифрової освіти; доведено його позитивний вплив на навчальні результати, мотивацію та доступність освіти; нові мобільні освітні інструменти та технології активно розробляються і розвиваються. Хоча існують різні підходи до класифікації мобільного навчання та його засобів, наразі відсутня узгоджена, цілісна класифікація засобів підтримання мобільного навчання у шкільній освіті, що ускладнює їх системне використання.

Метою статті є теоретичне обґрунтування та розроблення класифікації засобів підтримання мобільного навчання у закладах загальної середньої освіти.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в тому, що:

- *вперше* обґрунтовано класифікацію засобів підтримання мобільного навчання у закладах загальної середньої освіти на основі поєднання технологічного та дидактичного підходів;
- *удосконалено* підходи до систематизації мобільних освітніх засобів через виокремлення їх функціональних груп (інформаційно-освітні, комунікаційні, організаційно-управлінські, контрольні-оцінювальні, інструменти створення контенту, дослідницькі та практико-орієнтовані, гейміфіковані, довідково-інформаційні);
- *набули подальшого розвитку* теоретичні засади використання мобільних технологій у шкільній освіті в умовах цифровізації освітнього середовища.

МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Дослідження ґрунтується на системному підході, згідно з яким розглядаємо засоби мобільного навчання як елемент освітнього середовища. Застосовано теоретичні методи науково-педагогічного пошуку, зокрема, проаналізовано наукові праці вітчизняних і зарубіжних учених, присвячені проблемам мобільного навчання, цифровізації освіти, використання цифрових технологій в освітньому процесі. Здійснено аналіз публікацій, індексованих у наукометричних базах Scopus та Web of Science, що висвітлюють сучасні підходи до організації мобільного навчання та використання відповідних засобів. Застосовано методи систематизації та класифікації для групування засобів підтримання мобільного навчання за визначеними ознаками. Класифікаційні ознаки було визначено на основі узагальнення функціональних характеристик мобільних засобів, представлених у проаналізованих наукових джерелах. Основним критерієм класифікації обрано дидактичну функцію засобу в структурі навчальної діяльності (подання інформації, взаємодія, управління, оцінювання, практична діяльність тощо). Додатково враховувалися особливості використання засобів у шкільному освітньому середовищі.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Результати проведеного теоретичного аналізу свідчать, що сучасні мобільні технології формують новий тип освітнього середовища, у межах якого навчальна діяльність учнів виходить за межі традиційного класно-урочного простору та набуває мобільного, гнучкого і контекстно залежного характеру. У таких умовах засоби підтримання мобільного навчання виступають не лише як технічні інструменти, а як складові цілісної системи організації освітнього процесу.

Під *засобами підтримання мобільного навчання* у дослідженні розуміємо сукупність цифрових інструментів, мобільних застосунків і сервісів, що забезпечують реалізацію основних компонентів навчальної діяльності учнів у мобільному освітньому середовищі, зокрема подання навчального матеріалу, організацію взаємодії, управління навчальним процесом, виконання завдань, контроль і оцінювання результатів.

Аналіз досліджень показує (Лазаренко, 2017; Chergui et al., 2017; Edumadze, 2022; Georgieva, 2005), що існуючі підходи до класифікації засобів мобільного навчання будуються переважно за технологічними (тип пристрою, тип застосунку, тип підключення), контекстно-організаційними (on-campus / off-campus, BYOD тощо) або загальнопедагогічними ознаками (біхевіористський, конструктивістський, контекстний та ін. підходи), тоді як функціонально-дидактична систематизація мобільних засобів саме для ЗЗСО залишається недостатньо розробленою (таблиця 1). У більшості випадків такі класифікації орієнтовані на вищу освіту або не диференціюють педагогічні функції засобів у структурі уроку.

Таблиця 1. Підходи до класифікації засобів підтримання мобільного навчання

Джерело	Критерії класифікації	Підходи до класифікації	Обмеження підходу
Лазаренко, 2017	Функціональні можливості засобів.	Gmail, Google Drive, Google Forms, Google+, Google Chrome, Mobile Learning Class як інтегроване середовище.	Орієнтація на окремі інструменти; відсутня цілісна система класифікації.
Chergui et al., 2017	Стратегії навчання та елементарні навчальні дії, врахування перспективи учня і вчителя.	BYOD (використання власних пристроїв), мобільні соціальні медіа, мобільні застосунки, мобільні сенсори тощо.	Класифікує передусім освітнє використання мобільності, а не конкретний набір інструментів для ЗЗСО; охоплення широке, але для шкільної практики потребує адаптації.
Edumadze, 2022	Опис уживаних пристроїв і технологій у ЗВО.	Мобільні телефони / смартфони, планшети, ноутбuki, цифрові блокноти.	Не пропонує завершеної авторської класифікації; орієнтоване на вищу освіту і на чинники прийняття технологій, а не на систематизацію освітніх засобів.
Georgieva, 2005	Поєднання технологічних і освітньо-організаційних критеріїв.	Тип підтримуваних пристроїв; тип зв'язку; синхронне / асинхронне навчання; місце використання (on-campus / off-campus) тощо.	Класифікує системи, а не конкретні засоби; орієнтована на інфраструктуру й доступ, а не на педагогічні функції інструментів.

Джерело: складено автором на основі (Лазаренко, 2017; Chergui et al., 2017; Edumadze, 2022; Georgieva, 2005)

Як бачимо, більшість існуючих підходів орієнтована на загальний або університетський освітній контекст, зосереджена або на технологічних характеристиках, або на окремих інструментах, не забезпечує системного узгодження мобільних засобів із дидактичною структурою навчальної діяльності учнів. Таким чином, можна підсумувати, що у сучасній науковій літературі відсутня цілісна класифікація засобів підтримування мобільного навчання, побудована на функціонально-дидактичному принципі та орієнтована на специфіку ЗЗСО.

На відміну від існуючих підходів, запропонована у дослідженні класифікація орієнтована не на тип пристрою чи спосіб технічної реалізації мобільного рішення, а на його провідну функцію в освітньому процесі ЗЗСО. Вона побудована за функціонально-дидактичним принципом, що передбачає групування засобів відповідно до ролі у структурі навчальної діяльності учнів, зокрема:

- доступ до навчальної інформації та її візуалізацію;
- організацію взаємодії між учасниками освітнього процесу;
- управління навчальною діяльністю та її планування;
- виконання навчальних завдань, у тому числі дослідницького та практичного характеру;
- контроль і оцінювання результатів навчання;
- підтримку навчальної мотивації та залученості учнів.

Водночас встановлено, що сучасні мобільні засоби характеризуються поліфункціональністю, проте в кожному конкретному випадку їх використання можна виокремити провідну роль, яка визначає їх місце у структурі навчального процесу. Орієнтація на таку провідну роль стала основою для систематизації засобів підтримування мобільного навчання. Такий підхід дозволяє перейти від фрагментарного розгляду окремих цифрових інструментів до їх цілісного представлення як елементів педагогічної системи, що забезпечує реалізацію різних аспектів навчання в умовах мобільного освітнього середовища. У результаті проведеного дослідження було виокремлено групи засобів підтримування мобільного навчання, які відображають їх призначення та функції в освітньому процесі ЗЗСО.

Узагальнення отриманих результатів дало змогу сформулювати класифікацію засобів підтримування мобільного навчання, що враховує сучасні тенденції розвитку мобільних технологій і потреби організації навчальної діяльності учнів. Запропонована класифікація дозволяє систематизувати різноманітні засоби підтримування мобільного навчання відповідно до їх функціонального призначення та дидактичної ролі, що сприяє більш обґрунтованому їх використанню в освітньому процесі ЗЗСО (таблиця 2.).

Таблиця 2. Класифікація засобів підтримування мобільного навчання в закладах загальної середньої освіти

Група засобів	Дидактична функція	Тип засобу	Характеристика	Приклади
Інформаційно-освітні	Подання навчального матеріалу	Освітні платформи, відеосервіси, електронні ресурси	Забезпечують доступ до структурованого навчального контенту, візуалізацію та пояснення матеріалу	Khan Academy, Prometheus, YouTube (освітній контент), Google Arts & Culture
Комунікаційні	Організація взаємодії	Месенджери, відеоконунікаційні сервіси	Забезпечують синхронну та асинхронну взаємодію між учасниками освітнього процесу	Viber, Telegram, Zoom, Google Meet
Організаційно-управлінські	Управління навчанням	LMS, освітні платформи управління навчанням	Підтримують планування, організацію та координацію навчальної діяльності	Google Classroom, Moodle, Microsoft Teams
Контрольно-оцінювальні	Оцінювання результатів	Сервіси тестування та опитування	Забезпечують формувальне та підсумкове оцінювання, збір і аналіз результатів	Google Forms, Kahoot!, Quizizz, Classtime
Інструменти створення контенту	Активна діяльність учнів	Редактори, платформи спільної роботи	Дозволяють створювати навчальний контент, візуалізації, презентації	Canva, Padlet, Miro
Дослідницькі та практико-орієнтовані	Практична діяльність	Навчальні симулятори, математичні середовища, AR/VR-застосунки	Підтримують моделювання, експериментування та дослідження	PhET, GeoGebra; AR-додатки (Merge Cube), VR-додатки (Google Expeditions)
Гейміфіковані засоби	Мотивація навчання	Освітні ігрові платформи	Реалізують ігрові механіки для підвищення мотивації	Duolingo, Classcraft, Quizizz
Довідково-інформаційні	Пошук і обробка інформації	Довідкові ресурси, енциклопедії	Забезпечують доступ до довідкових знань	Wikipedia, Wolfram Alpha

Джерело: авторська розробка

Класифікація побудована на функціонально-дидактичному принципі, відповідно до якого засоби групуються за їх провідною роллю у структурі навчальної діяльності учнів. При цьому враховано, що окремі цифрові сервіси можуть поєднувати кілька функцій, однак у межах класифікації вони віднесені до тієї групи, в якій реалізується їх домінуюче педагогічне призначення.

Розробка має як теоретичне, так і практичне значення. З наукової точки зору її доцільність зумовлена необхідністю впорядкування різноманіття мобільних цифрових інструментів, кількість і функціональні можливості яких постійно зростають. У сучасному освітньому середовищі мобільні засоби представлені великою кількістю застосунків і сервісів, що мають різне призначення, структуру та педагогічний потенціал. Відсутність їх систематизації ускладнює теоретичне осмислення їх ролі в навчальному процесі та обмежує можливості їх цілеспрямованого використання.

Запропонована класифікація дозволяє розглядати засоби підтримання мобільного навчання як елементи цілісної педагогічної системи, що відповідають різним аспектам навчальної діяльності.

Практична цінність класифікації полягає у створенні орієнтира для вчителя щодо обґрунтованого добору цифрових інструментів залежно від дидактичної мети уроку. В умовах надлишку освітніх застосунків учитель часто стикається з проблемою вибору доцільних засобів. Систематизоване представлення таких засобів за їх призначенням дозволяє:

- швидко визначити, які інструменти доцільно використовувати для пояснення нового матеріалу, організації взаємодії або контролю знань;
- узгодити використання мобільних засобів зі структурою уроку та етапами навчальної діяльності;
- забезпечити педагогічно доцільне поєднання різних інструментів у межах одного навчального заняття;
- уникнути випадкового або формального використання цифрових технологій.

Крім того, запропонована класифікація сприяє підвищенню рівня цифрової компетентності вчителів, оскільки формує цілісне уявлення про можливості мобільних технологій у навчанні та їх педагогічний потенціал. Вона також може бути використана як основа для розроблення методичних рекомендацій, освітніх програм і підвищення кваліфікації педагогічних працівників.

Важливою є і методична цінність класифікації, яка полягає у можливості її використання для проектування навчальних занять із застосуванням мобільних технологій, зокрема у STEM-орієнтованому навчанні, де поєднання різних типів діяльності (інформаційної, дослідницької, практичної) є особливо важливим.

Таким чином, запропонована класифікація не лише узагальнює сучасні підходи до використання мобільних засобів у навчанні, а й виступає ефективним інструментом педагогічного проектування, що сприяє підвищенню якості освітнього процесу в умовах цифровізації освіти.

ОБГОВОРЕННЯ

Отримані результати узгоджуються з висновками сучасних досліджень, у яких мобільне навчання розглядається як складна багатокомпонентна система, що поєднує технологічні, педагогічні та організаційні аспекти (Garzón, 2025; Naveed, 2023). Аналіз наукової літератури засвідчив наявність різних підходів до класифікації мобільного навчання та його засобів. Зокрема, у ряді досліджень класифікації будуються на технологічних засадах, де основною ознакою виступають типи пристроїв, способи підключення або технічні характеристики систем (Georgieva, 2005). Такі підходи дозволяють описати інфраструктуру мобільного навчання, однак не відображають його дидактичний потенціал. Інші дослідження орієнтовані на педагогічні підходи до навчання, зокрема біхевіористський, конструктивістський, контекстний та колаборативний (Chergui et al., 2017). У межах цих підходів мобільне навчання розглядається як інструмент реалізації певних освітніх стратегій, однак увага зосереджується переважно на процесах навчання, а не на систематизації конкретних засобів.

Порівняно з наведеними підходами, запропонована у дослідженні класифікація поєднує функціональний і дидактичний аспекти та орієнтована на структуру навчальної діяльності учнів у ЗЗСО. Її особливістю є групування засобів відповідно до їх провідної ролі в освітньому процесі, що дозволяє співвіднести використання цифрових інструментів з етапами уроку та дидактичними цілями.

Спільною рисою запропонованої класифікації з існуючими підходами є врахування функціональних можливостей мобільних засобів, зокрема їх ролі у комунікації, створенні контенту та оцінюванні. Водночас відмінність полягає в орієнтації на шкільний освітній контекст, урахуванні дидактичної структури навчальної діяльності, інтеграції різних типів цифрових засобів у єдину систему. Перевагою запропонованої класифікації є її практична спрямованість, що дозволяє використовувати її як інструмент педагогічного проектування. Вона створює основу для обґрунтованого добору цифрових засобів відповідно до цілей навчання, сприяє підвищенню ефективності освітнього процесу та розвитку цифрової компетентності вчителів.

Разом з тим, слід враховувати певні обмеження запропонованого підходу. Зокрема, сучасні мобільні засоби часто є поліфункціональними, що ускладнює їх однозначне віднесення до певної групи. Крім того, швидкий розвиток цифрових технологій зумовлює появу нових типів інструментів, що потребує періодичного оновлення класифікації. Таким чином, запропонована класифікація не суперечить існуючим підходам, а доповнює їх, забезпечуючи функціонально-дидактичну систематизацію засобів мобільного навчання з урахуванням специфіки ЗЗСО.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

У результаті проведеного дослідження здійснено теоретичне обґрунтування класифікації засобів підтримання мобільного навчання у ЗЗСО та доведено доцільність її побудови на функціонально-дидактичному принципі. Встановлено, що ефективність використання мобільних технологій у шкільному освітньому процесі значною мірою залежить від системного добору цифрових засобів відповідно до структури навчальної діяльності учнів.

У ході дослідження доведено, що існуючі підходи до класифікації мобільного навчання переважно орієнтовані на технологічні, організаційні або загальнопедагогічні ознаки та не забезпечують цілісної систематизації засобів підтримання мобільного навчання з урахуванням специфіки ЗЗСО. На цій основі розроблено класифікацію засобів підтримання мобільного навчання, яка передбачає їх поділ на вісім функціональних груп: інформаційно-освітні, комунікаційні, організаційно-управлінські, контрольні-оцінювальні, інструменти створення контенту, дослідницькі та практико-орієнтовані, гейміфіковані, довідково-інформаційні. Обґрунтовано, що виокремлені групи є достатніми та несуперечливими, оскільки вони відображають основні компоненти навчальної діяльності учнів (подання інформації, взаємодія, управління, виконання завдань, оцінювання, мотивація, дослідження та пошук інформації) і охоплюють ключові функції мобільних засобів у навчальному процесі.

Встановлено, що запропонована класифікація дозволяє систематизувати різноманітні мобільні засоби як елементи цілісної педагогічної системи, забезпечує їх узгодження зі структурою уроку та сприяє обґрунтованому добору цифрових інструментів відповідно до дидактичної мети навчання. Визначено, що межі застосування класифікації охоплюють ЗЗСО та пов'язані з використанням мобільних технологій у формальній освіті. Класифікація може бути використана у практиці педагогічної діяльності вчителів, у процесі проектування уроків, а також у системі підвищення кваліфікації педагогічних працівників.

Разом з тим, дослідження має певні обмеження. Зокрема, сучасні цифрові засоби характеризуються поліфункціональністю, що ускладнює їх однозначне віднесення до певної групи. Крім того, динамічний розвиток мобільних технологій зумовлює появу нових інструментів, що може потребувати подальшого уточнення та розширення запропонованої класифікації.

Перспективи подальших досліджень пов'язані з розробленням методичних рекомендацій щодо використання різних груп засобів мобільного навчання, дослідженням впливу мобільного навчання на формування ключових і цифрових компетентностей учнів.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори підтверджують відсутність фінансових, особистих чи інших інтересів, що можуть розглядатися як потенційний конфлікт інтересів щодо публікації цієї статті.

ДЖЕРЕЛА ФІНАНСУВАННЯ

Робота виконана за відсутності фінансової підтримки з боку будь-яких організацій.

ДОСТУПНІСТЬ ДАНИХ

Це дослідження не передбачало використання окремих наборів даних.

ВИКОРИСТАННЯ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Інструменти штучного інтелекту використовувалися при написанні цієї роботи для перевірки граматики, покращення англomовного перекладу (GPT, Grammarly).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Биков, В. Ю. (2013). Мобільний простір і мобільно орієнтоване середовище інтернет-користувача: особливості модельного подання та освітнього застосування. *Інформаційні технології в освіті*, 17, 9–37. <https://www.ite.kspu.edu/index.php/ite/article/view/240/257>
2. Кривонос, О. М., & Котенко, О. Д. (2023). Використання цифрових технологій в освітньому процесі. *Наука і техніка сьогодні*, 15, 161–175. [https://doi.org/10.52058/2786-6025-2023-1\(15\)-161-175](https://doi.org/10.52058/2786-6025-2023-1(15)-161-175)
3. Лазаренко, В. (2017). Мобільні додатки та технології для організації самостійного оволодіння курсантами англomовною лексико-граматичною компетентністю у читанні. *Innovative solutions in modern science*, 1(10). <http://naukajournal.org/index.php/ISMSD/article/view/1092>
4. Письменна, І., & Щербицька, В. (2021). Застосування технології мобільного навчання в процесі викладання іноземних мов. *Наукові записки Бердянського державного педагогічного університету. Серія : Педагогічні науки*, 1, 311–318. <https://doi.org/10.31494/2412-9208-2021-1-1-311-318>
5. Прохоренко, А. (2023). Використання мобільних технологій на уроках інформатики в умовах змішаного навчання. *Інноваційна професійна освіта*, 2, 157–160. <https://doi.org/10.32835/2786-619X.2023.2.9.157-160>
6. Chergui, O., Begdouri, A., & Groux-Leclot, D. (2017). A Classification of Educational Mobile Use for Learners and Teachers. *International Journal of Information and Education Technology*, 7(5), 324–330. <https://doi.org/10.18178/ijiet.2017.7.5.889>
7. Edumadze, J., Dithlokwa, G., & Demuyakor, J. (2022). Students' Acceptance and Perceptions of Perceived Usefulness of Mobile Learning Devices in Higher Educational Institutions. *Online Journal of Communication and Media Technologies*, 12, 1–14. <https://doi.org/10.30935/ojcm/11539>
8. Garzón, J., Kinshuk, Burgos, D., & Tlili, A. (2025). Advantages and challenges associated with mobile learning in education: A systematic literature review. *Journal of Computers in Education*, 12(4), 1173–1205. <https://doi.org/10.1007/s40692-024-00342-x>
9. Georgieva, E., Smrikarov, A., & Georgiev, T. (2005). A General Classification of Mobile Learning Systems. In: *International Conference on Computer Systems and Technologies - CompSysTech' 2005*. Varna, Bulgaria. <https://doi.org/10.13140/RG.2.1.3045.9286>
10. Lazaro, G.Rd., & Duart, J.M. (2023). Moving Learning: A Systematic Review of Mobile Learning Applications for Online Higher Education. *J. New Approaches Educ. Res.* 12, 198–224. <https://doi.org/10.7821/naer.2023.7.1287>
11. Moya, S., & Camacho, M. (2024). Leveraging AI-powered mobile learning: A pedagogically informed framework, *Computers and Education. Artificial Intelligence*, 7, 100276, <https://doi.org/10.1016/j.caeai.2024.100276>
12. Naveed, Q. N., Choudhary, H., Ahmad, N., Alqahtani, J., & Qahmash, A. I. (2023). Mobile Learning in Higher Education: A Systematic Literature Review. *Sustainability*, 15(18), 13566. <https://doi.org/10.3390/su151813566>
13. Papadakis, S. (2021). Advances in Mobile Learning Educational Research (A.M.L.E.R.): Mobile learning as an educational reform. *Advances in Mobile Learning Educational Research*, 1, 1–4, <https://doi.org/10.25082/AMLER.2021.01.001>
14. Sangur, K., Zubaidah, S., & Sulisetijono (2025). A systematic literature review of mobile learning trends in biology education over ten years. *Social Sciences & Humanities Open*, 11, 101429. <https://doi.org/10.1016/j.ssaho.2025.101429>
15. Valencia-Arias, A., Cardona-Acevedo, S., Gomez-Molina, S., Velez Holguin, & R., Valencia, J. (2024) Adoption of mobile learning in the university context: Systematic literature review. *PLoS ONE*, 19(6), e0304116. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0304116>
16. Yefremenko, A., Krainyk, Y., Fedoryna, T., Fomenko, V., & Dolhareva, M. (2025). Integration of mobile technologies in physical education: a systematic review of digital learning approaches (2014–2025). *Information Technologies and Learning Tools*, 110(6), 1–23. <https://doi.org/10.33407/itlt.v110i6.6324>

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Bykov, V. Yu. (2013). Mobilnyi prostir i mobilno oriietovane seredovshche internet-korystuvacha: osoblyvosti modelnoho podannia ta osvithnoho zastosuвання [Mobile space and mobile-oriented environment of the Internet user: features of model representation and educational application]. *Informatsiini tekhnologii v osviti – Information technology in education*, 17, 9–37. <https://www.ite.kspu.edu/index.php/ite/article/view/240/257> (in Ukrainian).
2. Kryvonos, O. M., & Kotenko, O. D. (2023). Vykorystannia tsyfrovyykh tekhnologii v osvithnomu protsesi [The use of digital technologies in the educational process]. *Nauka i tekhnika siodni–Science and technology today*, 15, 161–175. [https://doi.org/10.52058/2786-6025-2023-1\(15\)-161-175](https://doi.org/10.52058/2786-6025-2023-1(15)-161-175) (in Ukrainian).
3. Lazarenko, V. (2017). Mobilni dodatky ta tekhnologii dlia orhanizatsii samostiinoho ovolodinnia kursantamy anhlo-movnoiu leksyko-hramatychnoiu kompetentnistiu u chytanni [Mobile applications and technologies for organizing independent mastery of English lexical and grammatical competence in reading by cadets]. *Innovative solutions in modern science*, 1(10). <http://naukajournal.org/index.php/ISMSD/article/view/1092> (in Ukrainian).
4. Pysmenna, I., & Shcherbytska, V. (2021). Application of mobile learning technology in the process of teaching foreign languages [Zastosuвання tekhnologii mobilnoho navchannia v protsesi vykladannia inozemnykh mov]. *Naukovi zapysky Berdianskoho derzhavnogo pedahohichnoho universytetu. Serii: Pedahohichni nauky – Scientific notes of Berdyansk State Pedagogical University. Series: Pedagogical Sciences*, 1, 311–318. <https://doi.org/10.31494/2412-9208-2021-1-1-311-318> (in Ukrainian).
5. Prokhorenko, A. (2023). Vykorystannia mobilnykh tekhnologii na urokakh informatyky v umovakh zmishanoho navchannia [Using mobile technologies in computer science lessons in a blended learning environment]. *Innovatsiina profesiina osvita–Innovative professional education*, 2, 157–160. <https://doi.org/10.32835/2786-619X.2023.2.9.157-160> (in Ukrainian).
6. Chergui, O., Begdouri, A., & Groux-Lecllet, D. (2017). A Classification of Educational Mobile Use for Learners and Teachers. *International Journal of Information and Education Technology*, 7(5), 324–330. <https://doi.org/10.18178/ijiet.2017.7.5.889>
7. Edumadze, J., Ditlhokwa, G., & Demuyakor, J. (2022). Students' Acceptance and Perceptions of Perceived Usefulness of Mobile Learning Devices in Higher Educational Institutions. *Online Journal of Communication and Media Technologies*, 12, 1–14. <https://doi.org/10.30935/ojcm/11539>
8. Garzón, J., Kinshuk, Burgos, D., & Tlili, A. (2025). Advantages and challenges associated with mobile learning in education: A systematic literature review. *Journal of Computers in Education*, 12(4), 1173–1205. <https://doi.org/10.1007/s40692-024-00342-x>
9. Georgieva, E., Smrikarov, A., & Georgiev, T. (2005). A General Classification of Mobile Learning Systems. In: *International Conference on Computer Systems and Technologies - CompSysTech' 2005*. Varna, Bulgaria. <https://doi.org/10.13140/RG.2.1.3045.9286>
10. Lazaro, G.Rd., & Duarte, J.M. (2023). Moving Learning: A Systematic Review of Mobile Learning Applications for Online Higher Education. *J. New Approaches Educ. Res.* 12, 198–224. <https://doi.org/10.7821/naer.2023.7.1287>
11. Moya, S., & Camacho, M. (2024). Leveraging AI-powered mobile learning: A pedagogically informed framework, Computers and Education. *Artificial Intelligence*, 7, 100276. <https://doi.org/10.1016/j.caeai.2024.100276>
12. Naveed, Q. N., Choudhary, H., Ahmad, N., Alqahtani, J., & Qahmash, A. I. (2023). Mobile Learning in Higher Education: A Systematic Literature Review. *Sustainability*, 15(18), 13566. <https://doi.org/10.3390/su151813566>
13. Papadakis, S. (2021). Advances in Mobile Learning Educational Research (A.M.L.E.R.): Mobile learning as an educational reform. *Advances in Mobile Learning Educational Research*, 1, 1–4. <https://doi.org/10.25082/AMLER.2021.01.001>
14. Sangur, K., Zubaidah, S., & Sulisetijono (2025). A systematic literature review of mobile learning trends in biology education over ten years. *Social Sciences & Humanities Open*, 11, 101429. <https://doi.org/10.1016/j.ssaho.2025.101429>
15. Valencia-Arias, A., Cardona-Acevedo, S., Gomez-Molina, S., Velez Holguin, & R., Valencia, J. (2024) Adoption of mobile learning in the university context: Systematic literature review. *PLoS ONE*, 19(6), e0304116. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0304116>
16. Yefremenko, A., Krainyuk, Y., Fedoryna, T., Fomenko, V., & Dolhareva, M. (2025). Integration of mobile technologies in physical education: a systematic review of digital learning approaches (2014–2025). *Information Technologies and Learning Tools*, 110(6), 1–23. <https://doi.org/10.33407/itlt.v110i6.6324>

| Матеріал надійшов до редакції: 15.02.2026 р. | Прийнято до друку: 27.03.2026 р. | Опубліковано: 30.04.2026 р. |



ДИЛАТАЦІЇ ПЛОЩИНИ У ШКМ ТА ТЕОРІЇ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ПЛОЩИНИ ДЛЯ МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ

Микола ПРАЦЬОВИТИЙ ✉

Український державний університет
імені Михайла Драгоманова, Україна
Інститут математики НАН України, Україна
prats4444@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-6130-9413>

Наталія ПРАВИЦКА

Український державний університет
імені Михайла Драгоманова, Україна
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, Україна
n.pravitska@chnu.edu.ua
<https://orcid.org/0009-0004-7651-9105>

Софія РАТУШНЯК

Український державний університет
імені Михайла Драгоманова, Україна
Інститут математики НАН України, Україна
ratush404@gmail.com
<https://orcid.org/0009-0005-2849-6233>

PLANE DILATIONS IN THE SCHOOL MATHEMATICS COURSE AND THE THEORY OF GEOMETRIC TRANSFORMATIONS FOR FUTURE MATHEMATICS TEACHERS

Mykola PRATSIOVYTYI ✉

Dragomanov Ukrainian
State University, Ukraine
Institute of Mathematics NAS Ukraine, Ukraine
prats4444@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-6130-9413>

Natalia PRAVITSKA

Dragomanov Ukrainian
State University, Ukraine
Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Ukraine
n.pravitska@chnu.edu.ua
<https://orcid.org/0009-0004-7651-9105>

Sofia RATUSHNIAK

Dragomanov Ukrainian
State University, Ukraine
Institute of Mathematics NAS Ukraine, Ukraine
ratush404@gmail.com
<https://orcid.org/0009-0005-2849-6233>

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. Геометричні перетворення є важливим компонентом шкільного курсу геометрії та підготовки майбутніх учителів математики. Разом із тим, аналіз змісту шкільних підручників і навчально-методичної літератури свідчить про наявність певних методологічних неточностей у трактуванні понять геометричних перетворень та їх властивостей, замість перетворень площини розглядаються перетворення фігур. Це обумовлює необхідність більш системного й науково обґрунтованого висвітлення теми перетворень подібності та їх окремих підгруп у курсі аналітичної геометрії для майбутніх учителів математики.

Методи та матеріали. У дослідженні використано теоретичні методи науково-педагогічного пошуку, зокрема аналіз та узагальнення наукової і навчально-методичної літератури, а також математичні методи доведення і обґрунтування геометричних тверджень.

Результати. У статті розглянуто дилатації площини як підгрупу групи перетворень подібності. Проаналізовано їх основні властивості та інваріанти — геометричні властивості фігур і відношення між ними, що зберігаються при відповідних перетвореннях. Доведено, що дилатації площини у групі перетворень вичерпуються гомотетіями, паралельними перенесеннями та їх композиціями. Показано, що дилатації утворюють групу геометричних перетворень, а також наведено теоретичні твердження та приклади задач, які ілюструють застосування цих перетворень у дослідженні геометричних об'єктів.

Висновки. Проведене дослідження дозволяє систематизувати уявлення про дилатації площини як підгрупу перетворень подібності та уточнити їх місце у структурі геометричних перетворень. Отримані

ABSTRACT

Formulation of the problem. Geometric transformations constitute an important component of the school geometry curriculum and the professional training of future mathematics teachers. However, an analysis of school textbooks and educational literature reveals certain methodological inaccuracies in the interpretation of geometric transformations and their properties. This necessitates a more systematic, scientifically grounded presentation of similarity transformations and their particular subgroups in analytical geometry courses for pre-service mathematics teachers.

Materials and methods. The study employs theoretical methods of scientific and pedagogical research, including the analysis and synthesis of scientific and educational literature, as well as mathematical methods for proving and substantiating geometric statements.

Results. The article examines plane dilations as a subgroup of similarity transformations. Their fundamental properties and invariants — geometric properties of figures and relations between them that are preserved under the corresponding transformations — are analyzed. The connection between dilations, homotheties, and translations of the plane is established. It is shown that dilations form a group of geometric transformations. In addition, the paper presents theoretical statements and examples of problems illustrating the application of these transformations in the study of geometric objects.

Conclusions. The conducted research enables the systematization of the concept of plane dilations as a subgroup of similarity transformations and clarifies their place within the structure of geometric transformations. The results can be used in teaching analytical geometry at higher education institutions and in school geometry courses, particularly in elective classes,

результати можуть бути використані під час викладання аналітичної геометрії у закладах вищої освіти, а також у шкільному курсі геометрії, зокрема на факультативних заняттях, у гуртковій та позакласній роботі. Перспективи подальших досліджень пов'язані з розширенням аналізу підгруп перетворень подібності та їх застосуванням у методиці навчання геометрії.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: геометричні перетворення; перетворення подібності; дилатація; гомотетія; аналітична геометрія; шкільний курс геометрії; гурткова робота в школі; майбутній вчитель математики.

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Працьовитий М., Правіцка Н., Ратушняк С. Дилатації площини у ШКМ та теорії геометричних перетворень площини для майбутніх вчителів математики. *Фізико-математична освіта*, 2026. Том 41. № 2. С. 71-85. <https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i2-07>.

mathematical circles, and extracurricular activities. Prospects for further research include expanding the analysis of subgroups of similarity transformations and their application in the methodology of teaching geometry.

KEYWORDS: geometric transformations; similarity transformations; dilation; homothety; analytical geometry; school geometry curriculum; extracurricular activities in schools; future mathematics teacher.

FOR CITATION: Pratsiovytyi, M., Pravitska, N., & Ratushniak, S. (2026). Plane dilations in the school mathematics course and the theory of geometric transformations for future mathematics teachers. *Physical and Mathematical Education*, 41(2), 71-85. <https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i2-07>.

ВСТУП

Постановка проблеми. Ідея перетворення є плідною в математиці і має різнопланові реалізації в різних галузях науки і шкільних навчальних дисциплінах (в алгебрі розглядаються перетворення виразів, рівнянь та нерівностей, в початках аналізу – перетворення графіків функцій). В геометрії вона реалізується через поняття геометричного перетворення площини та простору (бієктивного відображення простору на себе), перетворення фігур, а також в перетвореннях систем координат, які тісно пов'язані і з геометричними перетвореннями, і з перетвореннями графіків функцій.

“Гільберт порівнював геометрію з чудовим садом, в якому кожен може підібрати собі квітку за смаком. Нині сад геометрії розрісся настільки, що навіть фахівцям стало складно орієнтуватися в його зарослях.” Якщо під квіткою розуміти геометричний об'єкт (фігуру, відношення) або факт (твердження), то геометричний метод (метод геометрії) є букетом, і таких в геометрії чимало. Здатність їх гармонічно поєднувати є вершиною майстерності геометра і тонким інструментом в руках ювеліра-математика. На превеликий жаль, сьогодні геометрія як навчальна дисципліна вимагає захисту. Тоді як саме геометрія формує просторову уяву, просторове бачення, алгоритмічне мислення учня, формує раціональність і альтернативність, допомагає знайти незабутні візуальні інтерпретації співвідношень, нерівностей, залежностей, фактів, які не є суто геометричними. Вона є театром форм і мотиватором математичної творчості.

Серед різноманіття методів геометрії (синтетичний, арифметичний, алгебраїчний, векторний, координатний, геометричних місць точок, кінематичний, фазового укрупнення, додаткового елемента або фігури тощо) почесне місце займає метод геометричних перетворень. Рафінованого формулювання суті цього методу (та, власне, і деяких інших методів) ми не знаходимо у шкільних підручниках. Для розв'язування складних геометричних задач часто доводиться комбінувати різні прийоми та методи. Але коли в міркуваннях використовуються рівність та подібність фігур, рухи (симетрії, переміщення, повороти), гомотетія, перетворення подібності, інверсія, то, безсумнівно, тут задіяні геометричні перетворення, і участь методу ненульова.

Аналіз актуальних досліджень. Геометричні перетворення площини у класах з поглибленим вивченням математики вивчаються у 9 класі. У програмі зазначено тему “Геометричні перетворення”, а в підручниках здебільшого реалізовується тема “Перетворення фігур” (Мерзляк та ін., 2017а, 2021). Вона включає пункти (питання): 1) Перетворення (відображення) фігур; 2) Рух. Паралельне перенесення; 3) Осьова симетрія; 4) Центральна симетрія; 5) Поворот; 6) Гомотетія. Подібність фігур. 7) Інверсія (для ознайомлення). Вивченню цієї теми передують пропедевтична робота і вивчення важливих тем “Рівність трикутників” та “Подібність трикутників” (8 клас), які суттєво розширюють арсенал засобів розв'язування геометричних задач, в першу чергу, на доведення та побудову.

Існує кілька педагогічних проблем, пов'язаних з вивченням геометричних перетворень площини. Перша з них стосується змісту програм і викладу теоретичного матеріалу в шкільних підручниках, друга пов'язана з готовністю вчителя до навчання учнів геометричним перетворенням площини, іноді просто з недостатньою підготовленістю до професійної діяльності випускника педагогічного університету (враховуючи існуючі сьогоднішні непрості умови підготовки педагогічних та науково-педагогічних кадрів), малочисельністю якісної україномовної навчальної літератури і для школярів, і для майбутніх та діючих вчителів математики, зокрема для самоосвіти вчителів. Проблеми загострюються через альтернативність програм та підручників. В контексті першої проблеми має існувати конструктивний діалог науковців, методистів, досвідчених педагогів і авторів шкільних підручників з метою вдосконалення навчальної літератури. Ґрунтовні обговорення, зважені альтернативи і виважені рішення могли б сприяти покращенню ситуації. А для цього має бути платформа для обговорення.

Стосовно другої проблеми, варто зауважити, що сьогодні майбутні вчителі математики готуються до професійної діяльності в складних освітніх реаліях (змішаний формат освітнього процесу, на заваді інтернет і штучний інтелект). Вихід один - має бути якісне дидактичне забезпечення освітнього процесу і в достатній кількості наявна навчальна література для самоосвіти. Зрозуміло, що вказані проблеми тісно пов'язані між собою, в першу чергу, коли це стосується змісту навчального матеріалу.

Зміст теми «Геометричні перетворення» (чи змістової лінії) у шкільних підручниках можна суттєво збагатити, додавши аналітичну складову (формули рухів, гомотетії, перетворення подібності), яка є засобом “найбільш точного висвітлення фактів” (Ф.Клейн). Це не вимагає додаткових часових ресурсів.

На наш погляд, дещо дивним є те, що в загальноосвітній школі (та власне і в усій літературі з елементарної геометрії) до цих пір основним методом викладу та вивчення геометричних перетворень є синтетичний метод (від означень, фактів та їх обґрунтувань до застосувань). Тоді як векторний і координатний є значно потужнішими і більш універсальними. Хоча формули для перетворень площини повільно почали пробивати собі дорогу до шкільних підручників (Мерзляк та ін., 2017b, 2017c; Шкільний та ін., 2025). Взаємодоповнюваність та гармонізація підходів, прийомів та методів в геометрії завжди мали лише позитивний ефект.

Виклад матеріалу у шкільних підручниках вимагає дещо вищого рівня науковості, який полягає в несуперечливості з науковими фактами і загальноприйнятими науковими означеннями понять та відношень, і має відповідати загальноприйнятим в науці домовленостям та трактуванням фактів, що, на жаль, не спостерігається на практиці. В шкільних підручниках можна зустріти “означення – це твердження...”, що “перетворення і відображення – це одне і те саме”. Це грубі методологічні помилки.

Зміст шкільних підручників та посібників ми розглядаємо у взаємозв'язку з готовністю вчителя працювати за цим підручником (посібником), а це веде нас до процесу підготовки майбутнього вчителя математики в університеті, до змісту суто геометричних та методичних університетських курсів, в яких розглядаються (вивчаються) геометричні перетворення. У вітчизняній і зарубіжній математичній літературі геометричні перетворення посідають помітне місце як у власне теоретичному, так і в навчально-методичному вимірах. З одного боку, класичні праці з евклідової геометрії та геометричних задач демонструють високу продуктивність перетворень як інструмента доведення, побудови й оптимізаційних міркувань. Це простежується в роботах, присвячених поглибленій евклідовій геометрії та задачам на екстремуми, де перетворення фактично виступають мовою геометричного аналізу фігур і відношень між ними (Andreescu et al., 2006; Johnson, 2013). З іншого боку, у вітчизняній практиці метод перетворень тривалий час входив до змісту шкільної та позашкільної математичної освіти через підручники, факультативні курси й задачки, у яких учням пропонувалося працювати з переміщеннями, подібністю, симетріями та іншими видами відображень як із засобом розв'язування задач різного рівня складності (Колмогоров та ін., 1972; Понарин & Скопец, 1981; Бевз та ін., 1982; Готман & Скопец, 1988; Погорелов, 1993; Вивальнюк та ін., 1998). Така лінія засвідчує, що тема геометричних перетворень має не епізодичний, а системний характер у математичній освіті, хоча способи її подання, рівень строгості й методичні акценти істотно різняться.

Водночас окремий напрям становлять праці, у яких геометричні перетворення осмислюються як самостійний об'єкт для вивчення та як основа підготовки майбутнього вчителя математики. Насамперед ідеться про видання, де послідовно розкрито рухи площини, перетворення подібності, ортогональні та афінні перетворення, а також окреслено теоретико-груповий підхід до геометрії, що дає змогу побачити за окремими видами перетворень цілісну систему інваріантів і структурних зв'язків (Боровик та ін., 2004; Працьовитий, 2007, 2013a, 2013b; Кравчук, 2018). Для методики навчання математики істотними є також дослідження, у яких розглянуто окремі перетворення як предмет спеціального аналізу, зокрема паралельне перенесення та поворот у геометричному середовищі (Ленчук, 2016; Ленчук & Працьовитий, 2019). У публікаціях зосереджено увагу не лише на змісті теми, а й на засобах її реалізації в освітньому процесі: використанні комп'ютерних інструментів для візуалізації перетворень (Семеніхіна & Друшляк, 2014) і на оновленні шкільного курсу математики в умовах НУШ, де геометричні перетворення знову набувають дидактичної ваги як засіб формування операційного бачення фігури та функціонального розуміння залежностей між її образами (Шкільний та ін., 2025; Шкільний, 2025). Отже, аналіз наявних джерел дає підстави стверджувати, що проблема вивчення дилатацій і перетворень подібності лежить на перетині фундаментальної геометрії, шкільної пропедевтики, університетської підготовки вчителя математики та сучасних цифрових практик навчання.

Розділ «Геометричні перетворення площини» є складовою програми з аналітичної геометрії (або геометрії) для майбутніх учителів математики, яка включає колінеації (афінні перетворення) площини та інверсію. Серед вагомих аргументів для відповіді на запитання: Чому майбутні вчителі математики мають ґрунтовно вивчати геометричні перетворення? – є простий аргумент «тому, що геометричні перетворення вивчаються в школі і не лише в класах з поглибленим рівнем вивчення математики (мова йде про рухи і перетворення подібності, зокрема гомотетію)». Звичайно, це не єдиний аргумент серед найважливіших. Метод геометричних перетворень є одним з основних методів елементарної математики, методів вивчення геометричних об'єктів і методів розв'язування задач (в першу чергу на доведення та побудову). Геометричні перетворення – чудовий засіб для розвитку просторого бачення, конструктивного та аналітичного мислення.

Однією з тем цього розділу аналітичної геометрії є тема «Перетворення подібності». Практична реалізація (змістовне наповнення, висвітлення) цієї теми і всього розділу традиційно здійснюється на координатно-векторній (найбільш сучасній) основі з використанням прямокутної декартової системи координат, оскільки подібність є метричним поняттям. Найбільш яскраво це прослідковується у програмах факультету математики, інформатики та фізики УДУ імені Михайла Драгоманова. Концептуально весь розділ має оболонку групового погляду на геометрію і її різні теорії, з точки зору якого евклідова геометрія є теорією інваріантів групи перетворень подібності, що включає рухи, а афінна геометрія є теорією інваріантів групи афінних перетворень, підгрупу якої утворюють перетворення подібності. Кожна з цих груп має ряд підгруп, які цікаві з різних точок зору. Однією з підгруп групи перетворень подібності (а саме – групі дилатацій), її інваріантам – властивостям фігур та відношень, що зберігаються при будь-якому перетворенні з цієї групи, присвячена дана робота.

Мета статті. Метою статті є дослідження дилатацій площини як підгрупи перетворень подібності, а також аналіз їх інваріантів – властивостей фігур і відношень, що зберігаються при будь-якому перетворенні з цієї групи.

Дана робота адресована в першу чергу вчителям математики для самоосвіти і студентам спеціальності середня освіта (математика), викладачам аналітичної геометрії, методистам і авторам шкільних підручників.

Матеріал можна використати на факультативних заняттях і в системі гурткової та позакласної роботи в школі, а також в процесі виконання курсових робіт студентами спеціальності “Середня освіта (математика)”.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У роботі використано теоретичні методи дослідження, зокрема аналіз наукової та навчально-методичної літератури з геометрії та методики її викладання, узагальнення та систематизацію наукових підходів до вивчення геометричних перетворень. Для дослідження властивостей дилатацій площини застосовано методи аналітичної геометрії, координатно-векторний підхід та елементи теорії груп геометричних перетворень.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1. Перетворення площини

Геометричним перетворенням площини називається взаємно однозначне, тобто бієктивне (одночасно ін'єктивне і сюр'єктивне), відображення площини на себе. Грубою методологічною помилкою є ототожнення перетворення і відображення. Якщо $f(M) = M'$, то M' називається образом точки M , а точка M – прообразом точки M' . Точки M і M' називаються відповідними при перетворенні f . *Інваріантною точкою* перетворення f називається точка M , для якої $f(M) = M$. Найпростішим прикладом перетворення площини є тотожне перетворення. Воно кожному точку площини переводить саму в себе і є важливим в сім'ї всіх перетворень площини.

Образом фігури Φ під дією перетворення φ називається фігура $\Phi' = \varphi(\Phi)$, кожна точка якої є образом деякої точки фігури Φ . Спільні властивості, включаючи числові характеристики, довільних двох фігур Φ і $\Phi' = \varphi(\Phi)$, називаються *інваріантами* перетворення φ .

При заданій прямокутній декартовій системі координат формули

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y), \\ y' = f_2(x, y), \end{cases}$$

які встановлюють зв'язок між координатами образу $M'(x'; y')$ і координатами прообразу $M(x; y)$ при перетворенні f , називають *аналітичним заданням перетворення* f або просто *формулами перетворення* f (тут під $f_1(x, y)$ і $f_2(x, y)$ розуміються математичні вирази, які містять змінні x та y). Наприклад, формули

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y, \end{cases} \quad \begin{cases} x' = -x + 2x_0, \\ y' = -y + 2y_0, \end{cases}$$

аналітично визначають тотожне перетворення і симетрію відносно точки $C(x_0; y_0)$ відповідно. Останнє перетворення ще називають *центральною симетрією* або *розворотом* (Коксетер & Грейтцер, 1978).

Зрозуміло, що не будь-яка пара виразів $f_1(x, y)$ і $f_2(x, y)$ визначають перетворення. Наприклад, формули $x' = |x| + 1$, $y' = x^2 - y$ не задають перетворення площини, оскільки дві різні точки $A(-1; 2)$ і $B(1; 2)$ відображаються в одну точку $A'(2; -1)$, тобто відображення, задане цими формулами, не має властивості ін'єктивності.

Не задають перетворення і формули $x' = x + 3y + 1$, $y' = 2x + 6y - 7$, оскільки всі точки площини під дією цього відображення переводяться в точки прямої $l: y = 2x - 9$. Тому відображення, задане вказаними формулами, не володіє властивістю сюр'єктивності. Скласти формули перетворення площини означає в одній і тій же системі координат пов'язати координати довільної точки площини з координатами її образу.

Два перетворення площини f_1 і f_2 називаються (вважаються) *рівними*, якщо $f_1(M) = f_2(M)$ для будь-якої точки M .

Одним з центральних понять в теорії геометричних перетворень є поняття *композиції перетворень*. Це бінарна алгебраїчна операція над перетвореннями, яку іноді ще називають "суперпозицією перетворень".

Композицією впорядкованої пари перетворень f_1 і f_2 називається перетворення $f = f_2 \circ f_1 = f_2(f_1)$, яке є послідовним виконанням перетворень f_1 і f_2 :

$$f(M) = [f_2 \circ f_1](M) = f_2(f_1(M)) = f_2(M') = M''.$$

Ця операція, взагалі кажучи, не є комутативною, тобто $f_2 \circ f_1 \neq f_1 \circ f_2$, оскільки дві осьові симетрії, осі яких перетинаються не під прямим кутом, не комутують.

Композиція осьової симетрії і паралельного перенесення на вектор, який паралельний осі, називається *ковзною симетрією*. В шкільному курсі математики це перетворення як окремий вид руху не розглядається, але воно важливе у контексті класифікації рухів 2-го роду за кількості інваріантних точок (теорема Шаля).

Теорема 1. Якщо G – множина всіх перетворень площини, то пара (G, \circ) є некомутативною групою.

Дві фігури Φ і Φ' називаються *G-еквівалентними* (або еквівалентними відносно групи перетворень G), якщо в групі G існує перетворення g , яке переводить фігуру Φ у фігуру Φ' .

Тотожне перетворення, центральна, осьова та ковзна симетрії, паралельне перенесення і поворот є прикладами перетворень площини, які зберігають відстані, тобто відстань між довільними двома точками рівна відстані між їх образами при цих перетвореннях. Такі перетворення називаються *рухами* (переміщеннями або ізометричними перетвореннями). Кожен рух є або осьовою симетрією або композицією не більше, ніж трьох осьових симетрій. Множина всіх рухів відносно операції композиції перетворень утворює групу. Дві фігури (зокрема два трикутники) називаються *рівними* (або *конгруентними*), якщо існує рух, який переводить одну фігуру в іншу.

Більш загальним перетворенням площини, ніж рух, є перетворення подібності. Воно зберігає відношення довжини образу відрізка до довжини його прообразу. Кожен рух є перетворенням подібності. Гомотетія з коефіцієнтом $m \neq \pm 1$ є одним з найпростіших перетворень подібності, відмінних від руху.

2. Група перетворень подібності

Перетворенням подібності з коефіцієнтом $k > 0$ називається перетворення площини f , яке довільним двом точкам A і B ставить у відповідність точки $A' = f(A)$ і $B' = f(B)$ такі, що виконується рівність $|A'B'| = k|AB|$.

Трикутник ABC вважається *додатно орієнтованим* або *правоорієнтованим*, якщо обхід його вершин в порядку A, B, C здійснюється проти годинникової стрілки, і *від'ємно* (або *ліво*) *орієнтованим* – в протилежному випадку. Зауважимо, що трикутники ABC і BAC протилежно орієнтовані, а трикутники ABC і BCA однаково орієнтовані.

Зауваження. Кожне перетворення подібності однорідно діє на всі трикутники, тобто або зберігає орієнтацію всіх трикутників, а саме всі трикутники переводить у трикутники тієї ж орієнтації, або змінює її на протилежну. Тому для перевірки, чи зберігає перетворення орієнтацію, досить розглянути один трикутник і його образ. Дане твердження є в повні самостійним фактом теорії, а його допоміжна роль полягає в обґрунтуванні коректності наступних означень перетворень першого та другого роду.

Перетворення подібності, яке кожен трикутник переводить в трикутник тієї ж орієнтації, називається *перетворенням 1-го (першого) роду*, а перетворення, яке кожен трикутник переводить в трикутник протилежної (іншої) орієнтації, називається *перетворенням 2-го (другого) роду*.

Кожне перетворення подібності згідно з теоремою про структуру перетворення подібності є композицією гомотетії і руху, а тому аналітично задається формулами:

$$f = g \circ h: \begin{cases} x' = kx \cos \alpha - \varepsilon ky \sin \alpha + x_0, \\ y' = kx \sin \alpha + \varepsilon ky \cos \alpha + y_0, \end{cases} \quad \varepsilon = \pm 1, k > 0.$$

Для рухів 1-го роду $\varepsilon = 1$, а для рухів 2-го роду $\varepsilon = -1$.

Якщо ввести позначення $a_1 \equiv k \cos \alpha$, $k \sin \alpha \equiv a_2$, то формули перетворення подібності набудуть вигляду:

$$\begin{cases} x' = a_1 x - \varepsilon a_2 y + x_0, \\ y' = a_2 x + \varepsilon a_1 y + y_0. \end{cases} \quad \text{де } \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = k.$$

Зауважимо, що виведення перших формул ґрунтується на відомих формулах взаємозв'язку координат однієї і тієї ж точки у різних декартових системах координат і на теоремі про структуру перетворення подібності. Другі формули легко вивести вповні автономним шляхом, використовуючи означення перетворення подібності та формулу відстані між двома точками.

Форма геометричної фігури – це спільна властивість всіх подібних між собою геометричних фігур. Кажуть, що дві фігури мають однакову форму, якщо існує перетворення подібності, яке одну з фігур переводить в іншу.

Дилатацією площини називається перетворення подібності, яке кожен прямокутник переводить у паралельну їй пряму або саму в себе.

Іноді дві прямі площини, які збігаються, теж вважають паралельними. Це не приводить до протиріч, але для аналітичної геометрії це створює незручності.

Термін «дилатація» (від латинського dilatation – розширення) не набув широкого використання в математиці, можливо вперше він використаний в роботі (Коксетер & Грейтцер, 1978).

З означення зрозуміло, що дилатація зберігає напрям прямої (колінеарність векторів). Це є видове означення окремого класу перетворень площини через головний інваріант деякої підгрупи групи всіх перетворень подібності площини. З'ясуємо вміст цієї групи.

3. Паралельне перенесення площини – дилатація

Паралельним перенесенням площини на вектор \vec{s} називається перетворення, яке точці M ставить у відповідність таку точку M' , що виконується векторна рівність: $\overline{MM'} = \vec{s}$.

Паралельне перенесення площини f на вектор $\vec{s} = (a; b)$ в прямокутній декартовій системі координат задається формулами: $\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b. \end{cases}$

Справді, якщо $M(x; y)$, $f(M) = M'(x'; y')$, то $\overline{MM'} = (x' - x; y' - y)$. Тому з рівності векторів $\overline{MM'}$ і $\vec{s} = (a; b)$ отримуємо формули паралельного перенесення. Маючи формули паралельного перенесення, легко дійти висновку, що паралельне перенесення однозначно визначається парою відповідних точок.

Лема 1. *Якщо дві паралельних перенесень p_1 і p_2 на деяку точку площини збігаються, то вони рівні.*

Доведення. Нехай паралельні перенесення p_1 і p_2 задані формулами:

$$p_1: \begin{cases} x' = x + a_1, \\ y' = y + b_1, \end{cases} \quad p_2: \begin{cases} x' = x + a_2, \\ y' = y + b_2, \end{cases} \quad (1)$$

і $p_1(M_0) = p_2(M_0)$, де $M_0(x_0; y_0)$. Тоді

$$\begin{cases} x_0 + a_1 = x_0 + a_2, \\ y_0 + b_1 = y_0 + b_2' \end{cases}$$

звідки $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$. Отже, $p_1 = p_2$.

Лема 2. *Паралельне перенесення зберігає відстані, тобто є рухом.*

Доведення. Нехай $M'(x'_1; y'_1)$ є образом точки $M_1(x_1; y_1)$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{s} = (a; b)$. Тоді $M'_1(x_1 + a; y_1 + b)$. Якщо $M'_2(x'_2; y'_2) = f(M_2)$, де $M_2(x_2; y_2)$. Тоді $M'_2(x_2 + a; y_2 + b)$ і

$$|M'_1 M'_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = |M_1 M_2|,$$

що й вимагалося довести.

Лема 3. *Паралельне перенесення площини на ненульовий вектор \vec{s} переводить пряму, яка не паралельна вектору \vec{s} , в паралельну пряму, а пряму паралельну вектору \vec{s} – саму в себе.*

Доведення. Прообразом прямої $l': Ax' + By' + C = 0$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{s} = (a; b)$ є пряма $l: A(x+a) + B(y+b) + C = 0$, яка є паралельною прямою l' за умови, коли вектор напрямку $\vec{s}_{l'} = (-B; A)$ прямої l' неколінеарний вектору $\vec{s} = (a; b)$.

Прямі l' і l збігаються тоді і лише тоді, коли

$$\frac{A}{A} = \frac{B}{B} = \frac{Aa + Bb + C}{C},$$

а ця умова рівносильна умові $Aa + Bb = 0$, тобто

$$-\frac{B}{a} = \frac{A}{b} \Leftrightarrow \vec{s}_{l'} \parallel \vec{s}.$$

Умова $l' \parallel l$ рівносильна $Aa + Bb \neq 0$, тобто $\vec{s}_{l'} \neq \vec{s}$. Лему доведено.

Наслідок. Паралельне перенесення площини має властивість: кожну пряму переводить у паралельну пряму або саму в себе, тобто є дилатацією.

Лема 4. Паралельне перенесення є рухом 1-го роду.

Доведення. Нехай p – паралельне перенесення на вектор \vec{s} . Він у системі координат Oxy , напрям осі абсцис якої збігається з напрямом вектора \vec{s} , задається формулами:

$$\begin{cases} x' = x + s, \\ y' = y, \end{cases} \text{ де } s = |\vec{s}|.$$

Розглянемо трикутник OAB , де $O(0; 0)$, $A(s; 0)$, $B(0; 1)$ і його образ $O'A'B'$. Тоді $O'(s; 0)$, $A'(2s; 0)$, $B'(s; 1)$. Очевидно, що трикутники OAB і $O'A'B'$ мають однакову праву (додатну) орієнтацію. Тому паралельне перенесення є рухом першого роду.

Теорема 2. Множина P всіх паралельних перенесень, включаючи перенесення на нульовий вектор (тотожне перетворення), разом з операцією «композиція перетворень» утворює комутативну групу.

Доведення. Справді, якщо маємо два паралельні перенесення (формула 1), то їх композиції задаються формулами:

$$p_1 \circ p_2: \begin{cases} x' = x + (a_1 + a_2), \\ y' = y + (b_1 + b_2), \end{cases} \quad p_2 \circ p_1: \begin{cases} x' = x + (a_2 + a_1), \\ y' = y + (b_2 + b_1), \end{cases}$$

з яких бачимо, що $p_2 \circ p_1 = p_1 \circ p_2$ і перетворення $p = p_2 \circ p_1 = p_1 \circ p_2$ є паралельним перенесенням площини на вектор $\vec{s} = (a_1 + a_2; b_1 + b_2)$. Те, що обернене перетворення до паралельного перенесення на вектор \vec{s} є паралельним перенесенням на вектор $-\vec{s}$ очевидно. Тому згідно з критерієм підгрупи множина P є групою, причому комутативною. Теорему доведено.

Теорема 3. Паралельне перенесення на вектор $\vec{s} = (a; b)$ можна подати у вигляді композиції двох осьових симетрій з паралельними осями, які перпендикулярні вектору \vec{s} і віддалені одна від одної на відстань $\frac{1}{2}|\vec{s}|$.

Доведення. Нехай l_1, l_2 – дві прямі перпендикулярні вектору \vec{s} , відстань між якими $\frac{1}{2}|\vec{s}|$. Розглянемо таку прямокутну декартову систему координат XOY , що $l_1 \subset Ox$, $\vec{s} \uparrow \uparrow \vec{j}$. Якщо $|\vec{s}| = s$, то $\vec{s} = (0; s)$, $l_2: y = \frac{1}{2}s$. Тоді осьові симетрії з осями l_1, l_2 аналітично задаються відповідними формулами

$$f_1: \begin{cases} x' = x, \\ y' = -y, \end{cases} \quad f_2: \begin{cases} x' = x, \\ y' = -y + s, \end{cases}$$

а їх композиція

$$f_2 \circ f_1: \begin{cases} x'' = x' = x, \\ y'' = -y' + s = -(-y) + s = y + s \end{cases}$$

є паралельним перенесенням на вектор \vec{s} . Теорему доведено.

Розглянемо задачі на застосування паралельного перенесення площини.

Задача 1. Два ізометричних кола радіуса r мають зовнішній дотик в точці K . Хорди KA і KB цих кіл перпендикулярні. Знайти відстань між точками A і B .

Розв'язання. Нехай KC – діаметр кола, яке містить точку B , тоді кут $\angle CBK = \frac{\pi}{2}$, $BC \parallel AK$, як два перпендикуляри до однієї прямої KB і $KA = CB$. Паралельне перенесення на вектор \vec{KC} точку A переводить в точку B . Отже, $|AB| = |KC| = 2r$.

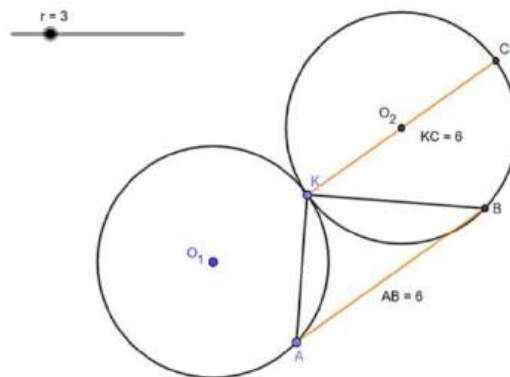


Рис. 1

Джерело: авторська розробка

Задача 2. Два рівних (конгруентних) кола радіуса R перетинаються в точках M і N . Точки P і Q цих кіл належать їх лінії центрів і знаходяться в одній півплощині з межею MN . Довести, що $|MN|^2 + |PQ|^2 = 4R^2$.

Розв'язання. Нехай O і O_1 – центри заданих кіл. Розглянемо паралельне перенесення на вектор $\vec{s} = \overrightarrow{OO_1}$. Воно перше коло ω переведе в друге коло ω_1 , точку $M \in \omega$ в точку $M_1 \in \omega_1$, причому $\overline{MM_1} = \overline{OO_1}$, $\overline{MM_1} \perp \overline{MN}$. Тоді трикутник NMM_1 є прямокутним і вписаним в коло заданого радіуса R . За теоремою Піфагора $|MN|^2 + |PQ|^2 = 4R^2$.

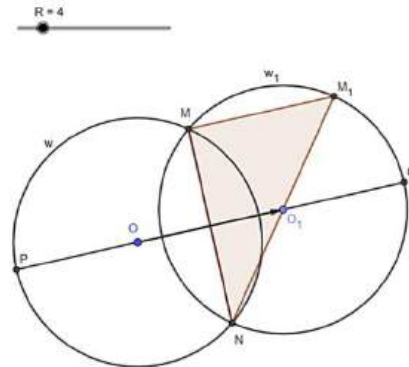


Рис. 2

Джерело: авторська розробка

Задача 3. Дано випуклий чотирикутник $ABCD$. Від точок A і C відкладено вектор $\vec{a} = \overline{AA_1} = \overline{CC_1}$, а від точок B і D відкладено вектор $\vec{b} = \overline{BB_1} = \overline{DD_1}$. Довести, що чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ випуклий і рівновеликий з $ABCD$.

Розв'язання. Паралельне перенесення площини на вектор \vec{a} діагональ AC чотирикутника $ABCD$ переводить у діагональ A_1C_1 чотирикутника $A_1B_1C_1D_1$. Паралельне перенесення площини на вектор \vec{b} діагональ BD чотирикутника $ABCD$ переводить у діагональ B_1D_1 чотирикутника $A_1B_1C_1D_1$.

Оскільки чотирикутник $ABCD$ випуклий, то точка $O = AC \cap BD$ перетину його діагоналей є внутрішньою для чотирикутника $ABCD$. Паралельне перенесення зберігає відстані, тому відповідні діагоналі чотирикутників $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ рівні, точка $O_1 = A_1C_1 \cap B_1D_1$ перетину діагоналей A_1C_1 і B_1D_1 є образом точки $O = AC \cap BD$ при обох паралельних перенесеннях. Тому точка O_1 є внутрішньою для чотирикутника $A_1B_1C_1D_1$, а отже, чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ є випуклим.

Оскільки паралельне перенесення кожен прямокутник переводить у паралельну пряму або саму в себе і зберігає відстані, то діагоналі чотирикутників рівні і рівні кути між діагоналями. Враховуючи те, що площа випуклого чотирикутника може бути обчислена як півдобуток довжин діагоналей і синуса кута між ними, робимо висновок про рівновеликість чотирикутників.

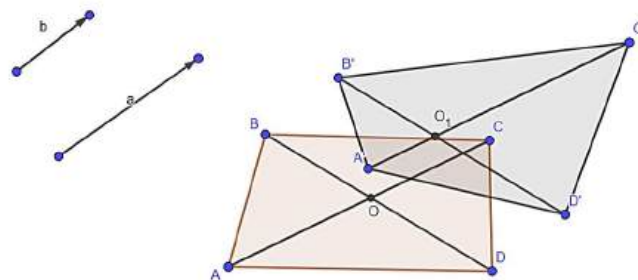


Рис. 3

Джерело: авторська розробка

4. Гомотетія – частковий випадок дилатації

Гомотетією площини з центром C і коефіцієнтом $m \neq 0$ називається перетворення площини, яке точці M ставить у відповідність точку M' таку, що виконується векторна рівність: $\overline{CM'} = m\overline{CM}$.

З означення бачимо, що при $m = 1$ гомотетія є тотожним перетворенням, а при $m = -1$ – центральною симетрією. В решті випадків гомотетія не є рухом.

Гомотетія з центром $C(c; d)$ і коефіцієнтом m в афінній і прямокутній декартовій системі координат задається формулами:

$$\begin{cases} x' = mx + (1 - m)c, \\ y' = my + (1 - m)d, \end{cases}$$

зокрема

$$\begin{cases} x' = mx, \\ y' = my, \end{cases}$$

якщо центр $C(0; 0)$ є початком системи координат.

Справді, якщо $C(c; d)$, $M(x; y)$, $M'(x'; y')$, то $\overline{CM'} = (x' - c; y' - d)$, $m\overline{CM} = (m(x - c); m(y - d))$ і з рівності $\overline{CM'} = m\overline{CM}$ отримуємо формули

$$\begin{cases} x' - c = m(x - c), \\ y' - d = m(y - d), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = mx + (1 - m)c, \\ y' = my + (1 - m)d. \end{cases}$$

Лема 5. Гомотетія з коефіцієнтом $m \neq 1$ переводить пряму, яка не проходить через центр гомотетії, в паралельну їй пряму, а пряму, яка проходить через центр гомотетії – в себе.

Доведення. Нехай $l: Ax + By + C = 0$ – задана пряма, l' – її образ. Тоді

$$l': A \cdot \frac{1}{m}x' + B \cdot \frac{1}{m}y' + C = 0 \Leftrightarrow Ax' + By' + mC = 0.$$

Звідки $l \parallel l'$, якщо $C \neq 0$, тобто пряма не проходить через початок координат (центр гомотетії) і $l = l'$, якщо $C = 0$.

Наслідок. Гомотетія є дилатацією.

Гомотетія має властивості:

- 1) Гомотетія з коефіцієнтом m є перетворенням подібності з коефіцієнтом $k = |m|$;
- 2) Гомотетія є перетворенням подібності 1-го роду;
- 3) Гомотетія переводить кут в рівний йому кут, паралельні прямі – в паралельні, а перпендикулярні – у перпендикулярні;
- 4) Перетворення, обернене до гомотетії з коефіцієнтом m , є гомотетією з коефіцієнтом $\frac{1}{m}$ і тим же центром;
- 5) Гомотетія коло переводить у коло, причому образом кола, центр якого збігається з центром гомотетії, є коло, концентричне заданому.

Всі ці властивості гомотетії елементарно аналітично обґрунтовуються з використанням формул гомотетії з центром у початку координат.

Зауважимо, що ці властивості легко обґрунтовуються, використовуючи формули гомотетії з центром в початку координат.

Лема 6. Композиція двох гомотетій, які відмінні від руху і мають різні центри, є паралельним перенесенням, якщо коефіцієнти гомотетій взаємообернені, і гомотетією – в протилежному випадку.

Доведення. Нехай задано дві гомотетії h_i з центрами O_i і коефіцієнтами $m_i \neq 1$, $i = 1, 2$, причому центр однієї з них збігається з початком координат. Тоді вони задаються формулами:

$$h_1: \begin{cases} \tilde{x} = m_1x, \\ \tilde{y} = m_1y, \end{cases} \quad h_2: \begin{cases} x' = m_2x + (1 - m_2)a, \\ y' = m_2y + (1 - m_2)b, \end{cases} \quad O_2(a; b);$$

$$f = h_2 \circ h_1: \begin{cases} x' = m_1m_2x + (1 - m_2)a, \\ y' = m_1m_2y + (1 - m_2)b. \end{cases}$$

З останніх формул видно, що f при $m_1m_2 = 1$ є паралельним перенесенням на вектор $\vec{s} = ((1 - m_2)a; (1 - m_2)b)$, а при $m_1m_2 \neq 1$ гомотетією з центром $C(c_1; c_2)$, де

$$\begin{cases} (1 - m_1m_2)c_1 = (1 - m_2)a, \\ (1 - m_1m_2)c_2 = (1 - m_2)b, \end{cases}$$

тобто

$$\begin{cases} c_1 = \frac{1 - m_2}{1 - m_1m_2} a, \\ c_2 = \frac{1 - m_2}{1 - m_1m_2} b. \end{cases}$$

Лему доведено.

Теорема (ознака гомотетії). Перетворення площини, задане формулами:

$$\begin{cases} x' = mx + c_1, \\ y' = my + c_2, \end{cases} \text{ де } m \neq 1,$$

є гомотетією з центром $C\left(\frac{c_1}{1-m}; \frac{c_2}{1-m}\right)$ і коефіцієнтом m .

Доведення. Справді, задані формули можна записати у вигляді

$$\begin{cases} x' = mx + (1 - m)\frac{c_1}{1 - m}, \\ y' = my + (1 - m)\frac{c_2}{1 - m}, \end{cases}$$

в яких ми впізнаємо гомотетію з центром $C\left(\frac{c_1}{1-m}; \frac{c_2}{1-m}\right)$ і коефіцієнтом m .

Теорема 3. Множина H_C всіх гомотетій площини зі спільним центром C разом з операцією «композиція перетворень» утворюють комутативну групу.

Доведення. Розглянемо множину всіх гомотетій з центром O , яку виберемо за початок координат ПДСК. Нехай f_1 – гомотетія з коефіцієнтом m_1 , f_2 – гомотетія з коефіцієнтом m_2 . Тоді мають місце формули:

$$f_1: \begin{cases} x' = m_1x, \\ y' = m_1y, \end{cases} \quad f_2: \begin{cases} x' = m_2x, \\ y' = m_2y. \end{cases}$$

Легко бачити, що згідно з ознакою гомотетії за аналітичним заданням композиція

$$f = f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1: \begin{cases} x' = m_1m_2x, \\ y' = m_1m_2y, \end{cases}$$

є гомотетією з коефіцієнтом $m = m_1 m_2$. Обернене перетворення до $h(O, m)$ є перетворення $h^{-1}\left(O, \frac{1}{m}\right)$. Справді,

$$h \circ h^{-1} = h^{-1} \circ h: \begin{cases} x' = m \cdot \frac{1}{m} x, \\ y' = m \cdot \frac{1}{m} y, \end{cases} \Leftrightarrow h \circ h^{-1} = h^{-1} \circ h = e: \begin{cases} x' = x, \\ y' = y. \end{cases}$$

Отже, множина усіх гомотетій зі спільним центром утворює комутативну групу.

Означення. Дві фігури, які переводяться одна в іншу деякою гомотетією, називаються *гомотетичними*.

Наприклад, ΔABC і $\Delta A_1 B_1 C_1$, де A_1 – середина BC , B_1 – середина AC , C_1 – середина AB , гомотетичні. Перший переводиться в другий гомотетією з центром G , який є точкою перетину медіан ΔABC і коефіцієнтом $m = -\frac{1}{2}$. Гомотетія з коефіцієнтом $m = -2$ і тим же центром переводить $\Delta A_1 B_1 C_1$ в ΔABC .

Ефективність застосування гомотетії в задачах на доведення демонструють наступні приклади доведень класичних фактів (теорем).

Задача 4. Довести, що для довільного трикутника точка перетину медіан (центр мас, центроїд), точка перетину висот (ортоцентр) і центр описаного навколо трикутника кола лежать на одній прямій (пряма Ойлера). Центроїд ділить відрізок, що з'єднує ортоцентр і центр описаного кола у відношенні 2:1.

Доведення. Нехай ABC – довільний трикутник, G – його центр мас, H – ортоцентр, O – центр описаного кола. Якщо ABC – рівносторонній, то $G = H = O$. В цьому випадку коло Ойлера не визначене.

Нехай ABC – трикутник неправильний. Тоді точки G, H, O – різні. Гомотетія h з центром G і коефіцієнтом $m = -\frac{1}{2}$ трикутник ABC переводить у трикутник $A'B'C'$, вершинами якого є середини сторін даного трикутника. Оскільки гомотетія зберігає кути між прямими, то висоти трикутника ABC переходять у висоти трикутника $A'B'C'$, які є серединними перпендикулярами до сторін трикутника ABC . Отже, $h(H) = O, h(G) = G$. Оскільки H і O – відповідні точки при гомотетії h з центром G , то $\vec{GO} = -\frac{1}{2} \vec{GH}$. Звідки слідує колінеарність (належність одній прямій) точок G, O і H , що й вимагалось довести.

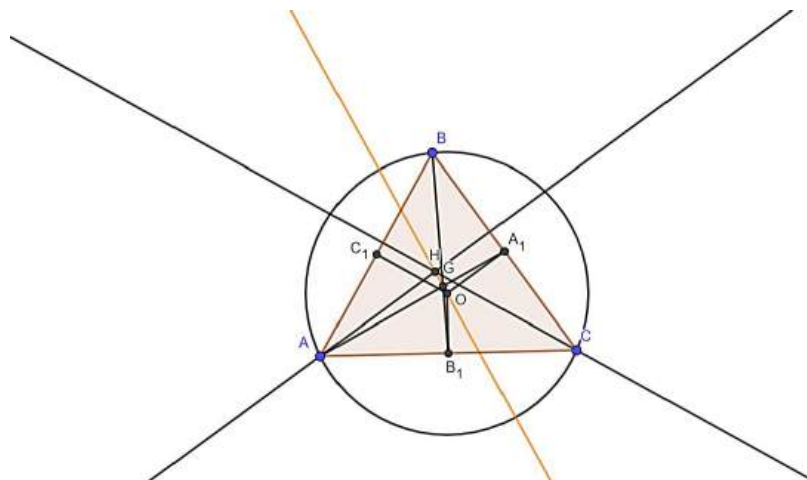


Рис. 4

Джерело: авторська розробка

Задача 5. Довести, що для довільного трикутника середини його сторін, основи висот і середини відрізків, які з'єднують ортоцентр H з вершинами, лежать на одному колі (коло Ойлера або коло дев'яти точок), центр якого є серединою відрізка з кінцями в ортоцентрі і центрі O описаного навколо трикутника кола, якщо $O = H$.

Доведення. Якщо трикутник правильний, то легко довести, що в цьому випадку колом Ойлера буде коло, вписане в цей трикутник.

Нехай ABC – трикутник неправильний, G – його центр мас, H – ортоцентр, O – центр, описаного навколо трикутника кола. Згідно з доведенням попереднього твердження при гомотетії h з центром G і коефіцієнтом $m = -\frac{1}{2}$ образом точки H є точка O , яка є ортоцентром трикутника $\Delta A'B'C' = h(\Delta ABC)$. Образом точки O є точка O' – центр кола ω' , описаного навколо трикутника $A'B'C'$, причому $\vec{GO'} = -\frac{1}{2} \vec{GO}$. Тоді $\vec{OO'} = \vec{O'H}$, тобто O' – середина відрізка OH . Коло ω' , описане навколо трикутника $A'B'C'$, є образом кола ω , описаного навколо трикутника ABC при гомотетії h , його радіус r' рівний половині радіуса r кола ω , описаного навколо трикутника ABC . Оскільки точка O' – середина відрізка OH , то вона рівновіддалена від ортогональних проєкцій A' і A_1 точок O і H на сторону BC . Тому $A_1 \in \omega'$.

Аналогічні міркування приводять до висновку, що $B_1 \in \omega'$ і $C_1 \in \omega'$. При гомотетії h_1 з центром H і коефіцієнтом $m = \frac{1}{2}$ точка O переходить в точку O' , а коло ω в коло ω' . Тоді точки A, B, C , що належать ω переходять в точки, що є серединами відрізків HA, HB, HC відповідно. При цьому $OG : GO' : O'H = 2 : 1 : 3$. Твердження доведено.

Пропонуємо читачеві самостійно, використовуючи гомотетію, довести, що *центр кола дев'яти точок лежить на прямій Ойлера і є серединою відрізка, який з'єднує ортоцентр і центр описаного кола*.

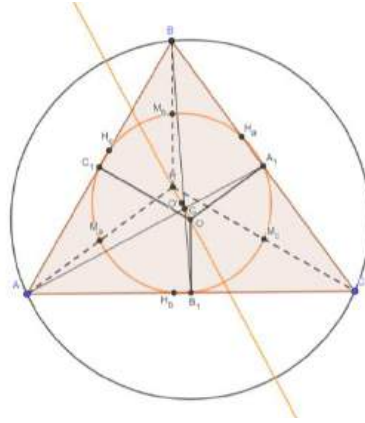


Рис. 5

Джерело: авторська розробка

Задача 6. Довести, що для довільного трикутника точки, симетричні його ортоцентру відносно сторін трикутника, лежать на колі описаному навколо трикутника.

Доведення. 1спосіб. Врахуємо міркування, які використовувались при доведенні двох попередніх тверджень, і використаємо ті самі позначення. Нехай ABC – довільний різносторонній трикутник, G – його центр мас, H – ортоцентр, O – центр, описаного навколо трикутника кола ω , H_1, H_2, H_3 – точки симетричні точці H відносно сторін трикутника.

Оскільки $(OH, O') = 1 = (HH_2, B_1)$, то $O'B_1$ – середня лінія трикутника $OH H_2$, тобто $OH_2 = 2 O'B_1 = 2r' = r$. А отже, H_2 належить колу ω . Аналогічно міркуючи, доводимо, що H_1 і H_3 належать ω . Твердження доведено.

Зауважимо, що коли трикутник правильний, то коло Ойлера є колом, вписаним в трикутник.

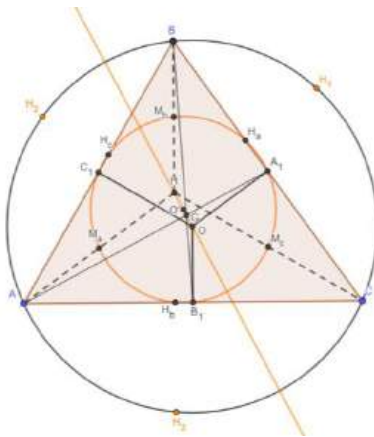


Рис. 6

Джерело: авторська розробка

5. Група дилатацій площини

Теорема 5. Композиції гомотетії, відмінної від тотожного перетворення, і паралельного перенесення, а також паралельного перенесення і гомотетії, відмінної від тотожного перетворення, є гомотетією з тим же коефіцієнтом і новим центром. Пряма, визначена центрами цих гомотетій, паралельна вектору перенесення. Гомотетія і паралельне перенесення не комутують.

Доведення. Нехай h – гомотетія з центром в початку координат O і коефіцієнтом m ; p – паралельне перенесення на вектор $\vec{s} = (a; b)$. Тоді

$$h: \begin{cases} x' = mx, \\ y' = my, \end{cases} \quad p: \begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b; \end{cases}$$

$$p \circ h: \begin{cases} x'' = mx + a = mx + (1 - m) \frac{a}{1 - m}, \\ y'' = my + b = my + (1 - m) \frac{b}{1 - m}, \end{cases} \quad C_1 \left(\frac{a}{1 - m}; \frac{b}{1 - m} \right),$$

$$h \circ p: \begin{cases} x'' = mx + ma = mx + (1 - m) \frac{ma}{1 - m}, \\ y'' = my + mb = my + (1 - m) \frac{mb}{1 - m}, \end{cases} \quad C_2 \left(\frac{ma}{1 - m}; \frac{mb}{1 - m} \right).$$

Обидві композиції, як бачимо, є гомотетіями з центрами C_1 і C_2 відповідно. Оскільки $m \neq 1$, то $p \circ h \neq h \circ p$. Разом з цим $\vec{C_2 C_1} = \vec{s}$, а отже, вектор $\vec{s} = (a; b)$ є вектором напрямку прямої $C_1 C_2$. Теорему доведено.

Теорема 6. Множина D , яка містить всі гомотетії та паралельні перенесення площини, включаючи перенесення на нульовий вектор, разом з операцією «композиція перетворень» утворює некомутативну групу.

Доведення. Покажемо, що операція «композиція перетворень» є бінарною алгебраїчною, тобто замкненою на множині D . Враховуючи теорему 1 і лему 6, досить розглянути композицію двох гомотетій з різними центрами.

Нехай h_1 і h_2 – гомотетії з коефіцієнтами m_1 та m_2 і центрами O та C відповідно. У прямокутній декартовій системі координат з початком O вони задаються формулами:

$$h_1: \begin{cases} x' = m_1x, \\ y' = m_1y, \end{cases} \quad h_2: \begin{cases} x' = m_2x + (1 - m_2)a, \\ y' = m_2y + (1 - m_2)b. \end{cases}$$

Тоді

$$h_2 \circ h_1: \begin{cases} x' = m_1m_2x + (1 - m_2)a = m_1m_2x + (1 - m_1m_2)a_1, \\ y' = m_1m_2y + (1 - m_2)b = m_1m_2y + (1 - m_1m_2)b_1. \end{cases}$$

Очевидно, що останні формули визначають гомотетію з коефіцієнтом $m = m_1m_2$ і центром $C_1(a_1; b_1)$, де

$$a_1 = \frac{1 - m_2}{1 - m_1m_2}a, \quad b_1 = \frac{1 - m_2}{1 - m_1m_2}b.$$

Наслідок. Множина H_C гомотетій зі спільним центром є підгрупою групи дилатацій.

Лема 7. Серед перетворень подібності 2-го роду не існує дилатацій.

Доведення. Припустимо, що існує перетворення подібності 2-го роду, яке є дилатацією. Тоді його формули мають загальний вигляд:

$$\begin{cases} x' = kx \cos \alpha + ky \sin \alpha + x_0, \\ y' = kx \sin \alpha - ky \cos \alpha + y_0. \end{cases}$$

Розглянемо прообраз $l': Ax' + By' + C = 0$. Її рівняння має вигляд

$$\begin{aligned} l: A(kx \cos \alpha + ky \sin \alpha + x_0) + B(kx \sin \alpha - ky \cos \alpha + y_0) + C &= 0, \\ l: k(A \cos \alpha + B \sin \alpha)x + k(A \sin \alpha - B \cos \alpha)y + (Ax_0 + By_0 + C) &= 0. \end{aligned}$$

Прямі l' і l паралельні або співпадають, якщо

$$\frac{k(A \cos \alpha + B \sin \alpha)}{A} = \frac{k(A \sin \alpha - B \cos \alpha)}{B},$$

тобто коли $AB \cos \alpha + B^2 \sin \alpha = A^2 \sin \alpha - AB \cos \alpha$,

$$2AB \cos \alpha = (A^2 - B^2) \sin \alpha$$

і це має виконуватись для довільної пари A, B такої, що $A^2 + B^2 \neq 0$. Але при $B = 0$ маємо $\sin \alpha = 0$, а при $A = B$ маємо $\cos \alpha = 0$, що одночасно неможливо. Таким чином, отримали суперечність, яка завершує доведення лєми.

Теорема 7. Якщо f – дилатація площини, то f або тотожне перетворення, або паралельне перенесення, або гомотетія.

Доведення. Нехай f – дилатація площини. Згідно з попередньою лемою f є перетворенням подібності 1-го роду. Тоді воно задається формулами

$$f: \begin{cases} x' = kx \cos \alpha - yk \sin \alpha + x_0, \\ y' = kx \sin \alpha + yk \cos \alpha + y_0. \end{cases} \quad k > 0.$$

Розглянемо довільну пряму $l': Ax' + By' + C = 0$ і її прообраз l при перетворенні f :

$$\begin{aligned} l: A(k \cos \alpha - ky \sin \alpha + x_0) + B(kx \sin \alpha + ky \cos \alpha + y_0) + C &= 0, \\ k(A \cos \alpha + B \sin \alpha)x + k(B \cos \alpha - A \sin \alpha)y + (Ax_0 + By_0 + C) &= 0. \end{aligned}$$

Прямі l і l' є паралельними або $l = l'$, якщо

$$\frac{k(A \cos \alpha + B \sin \alpha)}{A} = \frac{k(B \cos \alpha - A \sin \alpha)}{B}.$$

Звідки

$$\begin{aligned} AB \cos \alpha + B^2 \sin \alpha &= AB \cos \alpha - A^2 \sin \alpha, \\ (A^2 + B^2) \sin \alpha &= 0, \\ \sin \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Тоді $\cos \alpha = \pm 1$ і формули набувають вигляду

$$f_1: \begin{cases} x' = kx + x_0, \\ y' = ky + y_0, \end{cases} \quad \text{або} \quad f_2: \begin{cases} x' = -kx + x_0, \\ y' = -ky + y_0. \end{cases}$$

Якщо $k = 1$, то f_1 є паралельним перенесенням на вектор $\vec{s} = (x_0; y_0)$, а f_2 є центральною симетрією з центром $C\left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}\right)$.

Якщо $k \neq 1$, то маємо гомотетію з коефіцієнтом $m = \pm k$, оскільки

$$\begin{aligned} f_1: \begin{cases} x' = kx + (1 - k)a, \\ y' = ky + (1 - k)b, \end{cases} & \quad a = \frac{x_0}{1 - k}, \quad b = \frac{y_0}{1 - k}; \\ f_2: \begin{cases} x' = -kx + (1 + k)a, \\ y' = -ky + (1 + k)b, \end{cases} & \quad a = \frac{x_0}{1 + k}, \quad b = \frac{y_0}{1 + k}. \end{aligned}$$

Теорему доведено.

Наведемо приклади застосувань перетворень з групи дилатацій до розв'язування задач.

Задача 7. Чим є ГМТ площини, які є серединами відрізків, у яких один кінець знаходиться у заданій точці, а інший – на заданому колі.

Розв'язання. Шукане ГМТ є образом заданого кола при гомотетії з центром у заданій точці і коефіцієнтом 0,5.

Тому воно є колом, в двічі меншого радіуса, його центром є середина відрізка, який з'єднує задану точку і центр заданого кола.

Підтвердженням такого висновку є розв'язок цієї задачі методом координат.

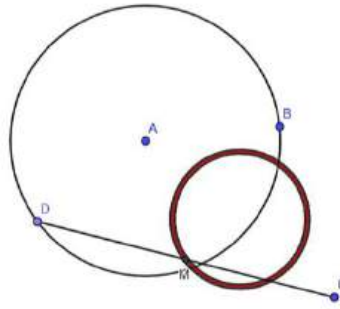


Рис. 7

Джерело: авторська розробка

Задача 8. Нехай ABC – довільний трикутник, G – його центр мас (точка перетину медіан AM_1, AM_2, AM_3). Чим для трикутника ABC є образ прямої l , яка містить висоту AA_0 , при гомотетії з центром G і коефіцієнтом $t = -\frac{1}{2}$?

Розв'язання. При цій гомотетії $\vec{GA'} = -\frac{1}{2}\vec{GA}$: $A \rightarrow M_1$ (за властивістю медіан), $AA_0 \rightarrow M_1A'$, де $M_1A' \perp BC$, оскільки при гомотетії образом прямої є пряма, паралельна даній, то з $AA_0 \perp BC$ випливає $M_1A' \perp BC$.

Пряма M_1A' проходить через середину $[BC]$ і йому перпендикулярна. Отже, M_1A' – серединний перпендикуляр.

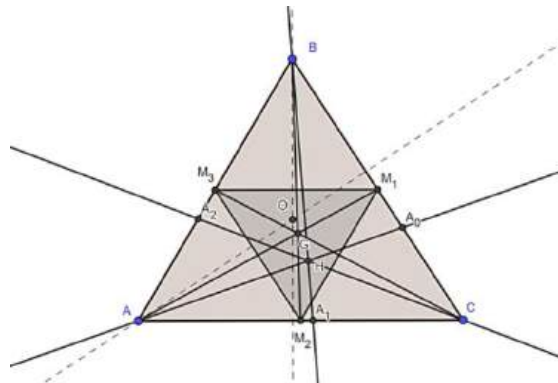


Рис. 8

Джерело: авторська розробка

Задача 9. Використовуючи гомотетію, довести, що висоти трикутника перетинаються в одній точці.

Розв'язання. Нехай ABC – довільний трикутник, AA_0, BB_0, CC_0 – його медіани, а AA_1, BB_1, CC_1 – висоти. Розглянемо гомотетію h з центром в точці перетину медіан G трикутника і коефіцієнтом $t = -\frac{1}{2}$. При цьому перетворенні:

$$\triangle ABC \rightarrow \triangle A_0B_0C_0,$$

висота AA_1 перейде в пряму $A_0A' \parallel AA_1$. Оскільки $AA_1 \perp BC$, то $A_0A' \perp BC$. Отже, A_0A' – серединний перпендикуляр до сторони BC . Аналогічно можна показати, що висоти BB_1 і CC_1 при даній гомотетії перпендикулярні B_0B' і C_0C' . Оскільки серединні перпендикуляри перетинаються в одній точці O (центрі описаного кола), то й прообрази цих прямих перетинаються в точці H .

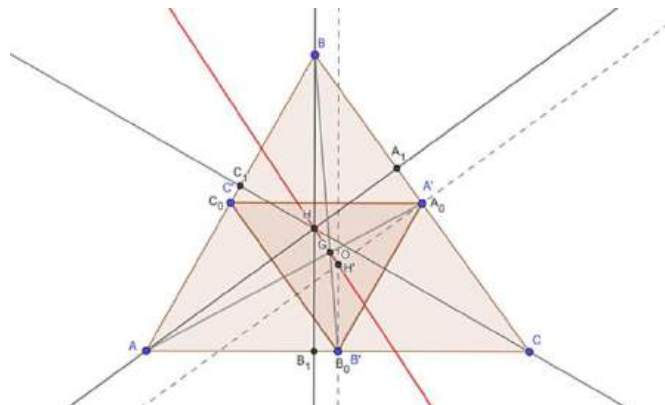


Рис. 9

Джерело: авторська розробка

Задача 10. Через точку перетину діагоналей трапеції з основами a і b паралельно до основ проведено пряму, яка перетинає бічні сторони в точках M і N . Довести, що $MN = \frac{2ab}{a+b}$.

Розв'язання. Нехай в прямокутній декартовій системі координат $R_0 = O_{i,j}$ задано трапецію $OABC$, де $|AB| = a$, $|OC| = b$ (див. рис. 10).

Розглянемо гомотетію h з коефіцієнтом $m = \frac{b}{a+b}$ і центром O , тобто

$$h: \begin{cases} x' = \frac{b}{a+b}x, \\ y' = \frac{b}{a+b}y. \end{cases}$$

Оскільки $\triangle OMK$ гомотетичний $\triangle OAB$, то згідно з властивостями гомотетії

$$\vec{MK} = \frac{b}{a+b}\vec{AB},$$

звідки $|\vec{MK}| = \frac{b}{a+b}|\vec{AB}| = \frac{ab}{a+b}$. Аналогічно $|KN| = \frac{ab}{a+b}$, таким чином, $|MN| = \frac{2ab}{a+b}$.

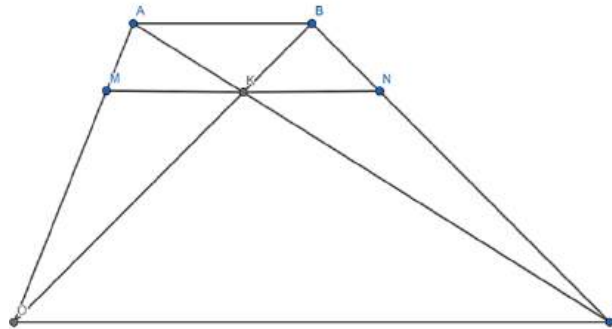


Рис. 10

Джерело: авторська розробка

Задача 11. Якщо дві трапеції, що мають спільну основу, подібні, то їх спільна основа є середнім геометричним двох інших основ цих трапецій.

Розв'язання. Нехай в прямокутній декартовій системі координат задана трапеція $OABC$, $O(0;0)$, $A(u;h)$, $B(u+a;h)$, $C(b;0)$. Проведемо пряму MN паралельно основам $OABC$ так, що $|MN| = \sqrt{ab}$. Оскільки $M \in OA$, $N \in BC$, то $M\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}u; \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}h\right)$, $N\left(\sqrt{ab} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}u; \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}h\right)$. Покажемо, що трапеції $OMNC$ і $MABN$ гомотетичні. Розглянемо гомотетію

$$h: \begin{cases} x' = \sqrt{\frac{a}{b}}x + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}u, \\ y' = \sqrt{\frac{a}{b}}y + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}h. \end{cases}$$

Тоді

$$h(O) = O' \left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}u; \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}h \right) = M, \quad h(C) = C' \left(\sqrt{ab} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}u; \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}h \right) = N,$$

$$h(M) = M' \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}u + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}u; \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}h + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}h \right) = A(u;h),$$

$$h(N) = N'(a+u;h) = B, \text{ тобто } h(OMNC) = MABN.$$

Отже, ми довели таке твердження: *пряма, що паралельна основам трапеції і дорівнює середньому геометричному довжин основ цієї трапеції, розбиває трапецію на дві подібні трапеції.*

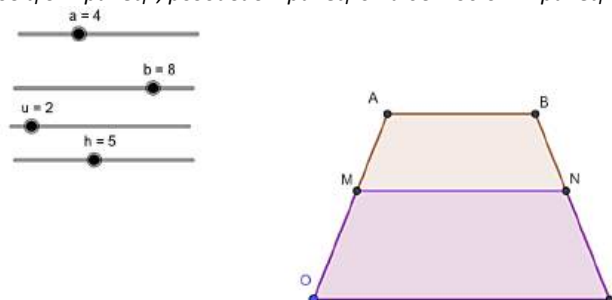


Рис. 11

Джерело: авторська розробка

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

У статті розглянуто дилатації площини як підгрупу перетворень подібності. Проаналізовано їх основні властивості та інваріанти, а також встановлено взаємозв'язок між дилатаціями, гомотетіями та паралельними перенесеннями площини. Показано, що дилатації утворюють групу геометричних перетворень та можуть бути ефективно використані при дослідженні властивостей геометричних фігур і розв'язуванні задач.

Отримані результати можуть бути використані у викладанні аналітичної геометрії у закладах вищої освіти, а також у шкільному курсі геометрії, зокрема під час факультативних занять та гурткової роботи. Перспективою подальших досліджень є розширення розгляду підгруп перетворень подібності та їх застосування у методиці навчання геометрії.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори підтверджують відсутність фінансових, особистих чи інших інтересів, що можуть розглядатися як потенційний конфлікт інтересів щодо публікації цієї статті.

ДЖЕРЕЛА ФІНАНСУВАННЯ

Робота виконана за відсутності фінансової підтримки з боку будь-яких організацій.

ДОСТУПНІСТЬ ДАНИХ

Це теоретичне дослідження не передбачає використання додаткових наборів даних.

ВИКОРИСТАННЯ ЗАСОБІВ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Інструменти штучного інтелекту не використовувались при написанні цієї роботи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Andreescu, T., Mushkarov, O., & Stoyanov, L. (2006). *Geometric problems on maxima and minima*. Birkhäuser Boston.
2. Johnson, R. A. (2013). *Advanced Euclidean geometry*. Courier Corporation.
3. Бевз, Г. П., Конфорович, А. Г., Резніченко, З. О., & Ченакал, Є. О. (1982). *Математика: Посібник для факультативних занять у 7 кл. Радянська школа*.
4. Боровик, В. Н., Зайченко, І. В., Мурач, М. М., & Яковець, В. П. (2004). *Геометричні перетворення площини*. Університетська книга.
5. Вивальнюк, Л. М., Соколенко, О. І., Мурач, М. М., Шидловська, Л. М., & Коваленко, І. П. (1998). *Математика, 10. Посібник для шкіл та класів з поглибленим вивченням математики*. Освіта.
6. Готман, Э. Г., & Скопец, З. А. (1988). *Задача одна – решения разные*. Радянська школа.
7. Істер, О. С. (2017). *Геометрія: підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів*. Генеза.
8. Істер, О. С. (2021). *Геометрія: підручник для 8 класу закладів загальної середньої освіти (2-ге вид.)*. Генеза.
9. Коксетер, Г. С., & Грейтцер, С. Л. (1978). *Новые встречи с геометрией*. Наука.
10. Колмогоров, А. М., Семенович, О. Ф., Нагібін, Ф. Ф., & Черкасов, Р. С. (1972). *Геометрія. 6 клас*. Радянська школа.
11. Кравчук, О. М. (2018). *Геометричні перетворення. Частина I. Ортогональні перетворення: методичні рекомендації до вивчення вибіркової навчальної дисципліни «Геометричні перетворення»*.
12. Ленчук, І. (2016). Метод перетворень: паралельне перенесення. *Математика в рідній школі*, 3, 37–42.
13. Ленчук, І. Г., & Працьовитий, М. В. (2019). Поворот навколо прямої в метричній стереометрії. *Математика. Інформаційні технології. Освіта*, 6, 57–65.
14. Мерзляк, А. Г., Полонський, В. Б., & Якір, М. С. (2017а). *Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підручник для 9 класу*. Гімназія.
15. Мерзляк, А. Г., Полонський, В. Б., & Якір, М. С. (2017б). *Геометрія: підручник для 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів (2-ге вид.)*. Гімназія.
16. Мерзляк, А. Г., Полонський, В. Б., & Якір, М. С. (2017с). *Геометрія: підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів*. Гімназія.
17. Мерзляк, А. Г., Полонський, В. Б., & Якір, М. С. (2021). *Геометрія: підручник для 8 класу з поглибленим вивченням математики закладів загальної середньої освіти (2-ге вид.)*. Гімназія.
18. Погорелов, О. В. (1993). *Геометрія: підручник для 7–11 класів середньої школи*. Освіта.
19. Понарин, Я. П., & Скопец, З. А. (1981). *Перемещения и подобия плоскости*. Радянська школа.
20. Працьовитий, М. В. (2007). *Геометричні перетворення. Теоретико-груповий погляд на геометрію*. Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова.
21. Працьовитий, М. В. (2013а). *Аналітична геометрія. Геометричні перетворення. Перетворення подібності з елементами теорії фракталів*. Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова.
22. Працьовитий, М. В. (2013б). *Геометричні перетворення. Рухи площини*. Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова.
23. Семеніхіна, О. В., & Друшляк, М. Г. (2014). Геометричні перетворення на площині і комп'ютерні інструментарії їх реалізації. *Комп'ютер у школі та сім'ї*, 7, 25–29. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/komp_2014_7_8
24. Школьний, О. В. (2025). Вивчення геометричних перетворень у 9 класі НУШ за авторським підручником інтегрованого курсу математики. *Дидактика математики: теорія, досвід, інновації*, 4, 7–19. <https://doi.org/10.31652/3041-2277-2025-4-7-19>
25. Школьний, О., Нелін, Є., Милянник, А., & Простакова, Ю. (2025). *Математика. Посібник як частина підручника інтегрованого курсу для 9 класу закладів загальної середньої освіти (у 2-х частинах) (Частина 1)*. Ранок.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Andreescu, T., Mushkarov, O., & Stoyanov, L. (2006). *Geometric problems on maxima and minima*. Birkhäuser Boston.
2. Johnson, R. A. (2013). *Advanced Euclidean geometry*. Courier Corporation.

3. Bezv, H. P., Konforovych, A. H., Reznichenko, Z. O., & Chenakal, Ye. O. (1982). *Matematyka: Posibnyk dlia fakultatyvnykh zaniat u 7 kl [Mathematics: A Guide for Optional Classes in Grade 7]*. Radianska shkola.
4. Borovyk, V. N., Zaichenko, I. V., Murach, M. M., & Yakovets, V. P. (2004). *Heometrychni peretvorennia ploschyny [Geometric Transformations of the Plane]*. Universytetska knyha.
5. Vyvalniuk, L. M., Sokolenko, O. I., Murach, M. M., Shydlovska, L. M., & Kovalenko, I. P. (1998). *Matematyka, 10. Posibnyk dlia shkil ta klasiv z pohlyblenym vyvchenniam matematyky [Mathematics, 10. A Guide for Schools and Classes with Advanced Study of Mathematics]*. Osvita.
6. Hotman, Э. H., & Skopets, Z. A. (1988). *Zadacha odna – resheniya raznye [One Problem – Different Solutions]*. Radianska shkola.
7. Ister, O. S. (2017). *Heometriia: pidruchnyk dlia 9 klasu zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv [Geometry: a textbook for the 9th grade of secondary schools]*. Heneza.
8. Ister, O. S. (2021). *Heometriia: pidruchnyk dlia 8 klasu zakladiv zahalnoi serednoi osvity [Geometry: a textbook for the 8th grade of secondary schools]*. (2-he vyd.). Heneza.
9. Kokseter, H. S., & Hreittser, S. L. (1978). *Novye vstrechy s heometryei [New encounters with geometry]*. Nauka.
10. Kolmohorov, A. M., Semenovych, O. F., Nahibin, F. F., & Cherkasov, R. S. (1972). *Heometriia. 6 klas [Geometry. Grade 6]*. Radianska shkola.
11. Kravchuk, O. M. (2018). *Heometrychni peretvorennia. Chastyna I. Ortohonalni peretvorennia: metodychni rekomendatsii do vyvchennia vybirkovoi navchalnoi dystsypliny «Heometrychni peretvorennia» [Geometric transformations. Part I. Orthogonal transformations: methodological recommendations for studying the elective academic discipline "Geometric transformations"]*.
12. Lenchuk, I. (2016). *Metod peretvoren: paralelne perenesennia [Transformation method: parallel transfer]*. *Matematyka v ridnii shkoli – Mathematics in the native school*, 3, 37–42.
13. Lenchuk, I. H., & Pratsovytyi, M. V. (2019). *Povorot navkolo priamoi v metrychnii stereometrii [Rotation around a straight line in metric stereometry]*. *Matematyka. Informatsiini tekhnolohii. Osvita – Mathematics. Information technologies. Education*, 6, 57–65.
14. Merzliak, A. H., Polonskyi, V. B., & Yakir, M. S. (2017a). *Heometriia dlia zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv z pohlyblenym vyvchenniam matematyky: pidruchnyk dlia 9 klasu [Geometry for general educational institutions with in-depth study of mathematics: a textbook for grade 9]*. Himnaziia.
15. Merzliak, A. H., Polonskyi, V. B., & Yakir, M. S. (2017b). *Heometriia: pidruchnyk dlia 8 klasu zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv [Geometry: a textbook for grade 8 of general educational institutions]* (2-he vyd.). Himnaziia.
16. Merzliak, A. H., Polonskyi, V. B., & Yakir, M. S. (2017c). *Heometriia: pidruchnyk dlia 9 klasu zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv [Geometry: a textbook for the 9th grade of general education institutions]*. Himnaziia.
17. Merzliak, A. H., Polonskyi, V. B., & Yakir, M. S. (2021). *Heometriia: pidruchnyk dlia 8 klasu z pohlyblenym vyvchenniam matematyky zakladiv zahalnoi serednoi osvity [Geometry: a textbook for the 8th grade with in-depth study of mathematics of general secondary education institutions]*. (2-he vyd.). Himnaziia.
18. Pohorielov, O. V. (1993). *Heometriia: pidruchnyk dlia 7–11 klasiv serednoi shkoly [Geometry: a textbook for the 7th–11th grades of secondary school]*. Osvita.
19. Ponaryn, Ya. P., & Skopets, Z. A. (1981). *Peremeshchennia y podobyia ploskosty [Displacements and similarity of planes]*. Radianska shkola.
20. Pratsovytyi, M. V. (2007). *Heometrychni peretvorennia. Teoretyko-hrupovyi pohliad na heometriiu [Geometric transformations. Group-theoretic view of geometry]*. Vyd-vo NPU imeni M. P. Drahomanova.
21. Pratsovytyi, M. V. (2013a). *Analitychna heometriia. Heometrychni peretvorennia. Peretvorennia podobnosti z elementamy teorii fraktaliv [Analytical geometry. Geometric transformations. Similarity transformations with elements of fractal theory]*. Vyd-vo NPU imeni M. P. Drahomanova.
22. Pratsovytyi, M. V. (2013b). *Heometrychni peretvorennia. Rukhy ploschyny [Geometric transformations. Plane motions]*. Vyd-vo NPU imeni M. P. Drahomanova.
23. Semenikhina, O. V., & Drushliak, M. H. (2014). *Heometrychni peretvorennia na ploschyni i komp'uterni instrumentarii yikh realizatsii [Geometric transformations on the plane and computer tools for their implementation]*. *Kompiuter u shkoli ta simi – Computer in school and family*, 7, 25–29. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/komp_2014_7_8
24. Shkolnyi, O. V. (2025). *Vyvchennia heometrychnykh peretvoren u 9 klasi NUSh za avtorskyim pidruchnykom intehrovanoho kursu matematyky [Study of geometric transformations in the 9th grade of the National Secondary School according to the author's textbook of the integrated course of mathematics]*. *Dydaktyka matematyky: teoriia, dosvid, innovatsii – Didactics of mathematics: theory, experience, innovations*, 4, 7–19. <https://doi.org/10.31652/3041-2277-2025-4-7-19>
25. Shkolnyi, O., Nelin, Ye., Mylianyk, A., & Prostakova, Yu. (2025). *Matematyka. Posibnyk yak chastyna pidruchnyka intehrovanoho kursu dlia 9 klasu zakladiv zahalnoi serednoi osvity (u 2-kh chastynakh) [Mathematics. Manual as part of the textbook of the integrated course for the 9th grade of general secondary education institutions (in 2 parts)]*. Chastyna 1. Ranok.

| Матеріал надійшов до редакції: 10.02.2026 р. | Прийнято до друку: 27.03.2026 р. | Опубліковано: 30.04.2026 р. |



КОГНІТИВНО-ВЕРИФІКАЦІЙНИЙ ПІДХІД ДО ТРАНСФОРМАЦІЇ ДОМАШНІХ ЗАВДАНЬ З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ В УМОВАХ ВИКОРИСТАННЯ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Ярослав ЧКАНА

Сумський державний педагогічний університет
імені А.С.Макаренка, Україна
chkana_76@ukr.net
<https://orcid.org/0000-0003-3667-3584>

A COGNITIVE-VERIFICATION APPROACH TO TRANSFORMING HOMEWORK IN MATHEMATICAL ANALYSIS IN THE CONTEXT OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE USE

Yaroslav CHKANA

Sumy State Pedagogical University
named after A. S. Makarenko, Ukraine
chkana_76@ukr.net
<https://orcid.org/0000-0003-3667-3584>

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. У статті розглядається проблема трансформації домашніх завдань з математичного аналізу в умовах широкого використання систем штучного інтелекту, здатних автоматично виконувати значну частину алгоритмічних математичних операцій. Виникає суперечність між дидактичною метою домашніх завдань і можливістю їх формального виконання без залучення когнітивної діяльності студента. Метою дослідження є обґрунтування підходу до організації домашніх завдань на основі врахування когнітивної складності задач і ступеня їх автоматизованості, а також експериментальна перевірка його ефективності.

Матеріали і методи. Дослідження проводилося у формі педагогічного експерименту в умовах дистанційного навчання студентів 2 курсу педагогічного університету під час вивчення теми «Функції багатьох змінних». У дослідженні взяли участь 8 студентів. Оцінювання здійснювалося за трьома показниками: правильність розв'язання, пояснення та верифікація результату (максимум 30 балів за тест). Виділення підгруп здійснювалося на основі характеру навчальної діяльності студентів. Запропонований підхід передбачає включення обов'язкового пояснювально-верифікаційного компоненту та використання задач різних типів за ступенем автоматизованості.

Результати. Результати експерименту показали, що на початковому етапі рівень підготовки студентів був близьким (48–50%). У процесі навчання спостерігається зростання результатів в обох підгрупах, однак більш виражена динаміка зафіксована у студентів, які систематично реалізовували пояснювальний компонент: підсумкові результати становили відповідно 77% проти 62%. Встановлено, що основні відмінності між підгрупами пов'язані не з правильністю обчислень, а з рівнем сформованості пояснювальної та верифікаційної діяльності.

Висновки. Зроблено висновок, що включення пояснювального компоненту змінює характер когнітивної діяльності студентів, підвищує когнітивну складність задач і знижує можливість їх формального виконання засобами штучного інтелекту. Обґрунтовано доцільність трансформації домашніх завдань на основі поєднання різних типів задач з урахуванням їх автоматизованості.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: штучний інтелект; математичний аналіз; домашні завдання; когнітивна складність; навчальні задачі; верифікація; пояснення.

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Чкана Я. Когнітивно-верифікаційний підхід до трансформації домашніх завдань з математичного аналізу в умовах використання штучного інтелекту. *Фізико-математична освіта*, 2026. Том 41. № 2. С. 86-93. <https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i2-06>.

ABSTRACT

Formulation of the problem. The article addresses the problem of transforming homework in mathematical analysis in the context of the widespread use of artificial intelligence systems capable of automatically performing a significant portion of algorithmic mathematical operations. This creates a contradiction between the didactic purpose of homework and the possibility of its formal completion without engaging students' cognitive activity. The aim of the study is to substantiate an approach to organizing homework based on the cognitive demand of tasks and the degree of their automation, as well as to experimentally verify its effectiveness.

Materials and methods. The study was conducted as a pedagogical experiment in a distance learning environment with second-year students of a pedagogical university during the study of the topic "Functions of Several Variables." The sample included 8 students. Assessment was carried out using three indicators: correctness of solution, explanation, and verification of the result (maximum score – 30 points per test). Subgroups were identified based on the nature of students' learning activity. The proposed approach involves the inclusion of a mandatory explanatory and verification component and the use of tasks of different types according to their level of automation.

Results. The results of the experiment showed that at the initial stage the students demonstrated a similar level of preparedness (48–50%). During the learning process, performance improved in both subgroups; however, a more pronounced increase was observed among students who systematically implemented the explanatory component, with final results of 77% compared to 62%. It was found that the main differences between the subgroups were related not to computational accuracy but to the level of development of explanation and verification skills.

Conclusions. It is concluded that the inclusion of an explanatory component changes the nature of students' cognitive activity, increases the cognitive demand of tasks, and reduces the possibility of their formal completion using artificial intelligence systems. The study substantiates the feasibility of transforming homework by combining different types of tasks considering their level of automation.

KEYWORDS: artificial intelligence; mathematical analysis; homework; cognitive demand; mathematical tasks; verification; explanation.

FOR CITATION: Chkana, Ya. (2026). A cognitive-verification approach to transforming homework in mathematical analysis in the context of artificial intelligence use. *Physical and Mathematical Education*, 41(2), 86-93. <https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i2-06>.

ВСТУП

Проблема організації домашніх завдань з математичного аналізу в умовах широкого доступу до систем штучного інтелекту набуває особливої актуальності. Традиційно домашні завдання виконують функції закріплення навчального матеріалу, формування обчислювальних навичок і розвитку математичного мислення. Проте сучасні генеративні системи штучного інтелекту здатні автоматично виконувати значну частину стандартних математичних задач, зокрема пов'язаних із диференціюванням, інтегруванням, дослідженням функцій тощо. Унаслідок цього виникає суперечність між дидактичною метою домашніх завдань і фактичною можливістю їх виконання без залучення когнітивної діяльності студента.

У цьому контексті особливого значення набуває питання про те, які саме навчальні задачі зберігають свою педагогічну цінність в умовах використання штучного інтелекту, і як їх структура пов'язана з когнітивною складністю та можливістю автоматизації.

Математичні задачі є ключовим інструментом організації навчальної діяльності (Stein & Smith, 1998). Тому аналіз когнітивної складності математичних задач є одним із фундаментальних напрямів досліджень. У класичних роботах M. Stein та S. Lane доведено, що характер мисленнєвої діяльності, яку вимагає задача, безпосередньо впливає на якість навчання: задачі, орієнтовані на концептуальне розуміння та міркування, забезпечують глибші результати, ніж задачі, спрямовані на відтворення алгоритмів (Stein & Lane, 1996).

Систематизація підходів до аналізу задач реалізована у рамках Task Analysis Guide (TAG), який класифікує задачі за чотирма рівнями когнітивної складності: memorization, procedures without connections, procedures with connections, doing mathematics. Подальші дослідження підтверджують значущість цієї моделі як одного з основних інструментів аналізу навчальних завдань у математичній освіті та підкреслюють її роль у формуванні дослідницького мислення учнів (Hsu et al., 2023.).

Разом з тим, результати емпіричних досліджень свідчать, що у навчальній практиці домінують задачі низького когнітивного рівня, які орієнтовані на алгоритмічне відтворення. Це обмежує можливості розвитку математичного мислення та здатності до аналізу і узагальнення. Більше того, навіть задачі потенційно високого рівня можуть втрачати свою когнітивну цінність у процесі навчання, якщо їх виконання зводиться до відтворення процедур.

Паралельно з цим розвивається напрям досліджень, пов'язаний із впливом цифрових технологій на навчання математики. Українські науковці підкреслюють, що використання інформаційно-комунікаційних технологій змінює характер навчальної діяльності, зокрема переносить акцент із обчислювальних навичок на інтерпретацію результатів і аналіз (Триус, 2010; Жалдак та ін., 2012). У сучасних умовах цифрової трансформації освіти ці тенденції посилюються і набувають нових форм (Вуков et al., 2022). Зокрема, дослідження (Drushlyak et al., 2025) вказують на трансформацію ролі домашніх завдань у математичній освіті під впливом цифрових технологій, що пов'язано зі зростанням можливостей їх автоматизованого виконання.

Особливу роль у сучасних умовах відіграють системи штучного інтелекту, зокрема великі мовні моделі, які активно інтегруються в освітній процес. Сучасні оглядові дослідження свідчать, що штучний інтелект має значний потенціал у навчанні математики, зокрема як засіб підтримки індивідуалізації навчання, генерації завдань та розвитку метакогнітивних умінь (Hwang & Tu, 2021; Kasneci et al., 2023). Водночас підкреслюється, що ефективність його використання залежить від характеру навчальної діяльності: ШІ може виступати як інструмент підтримки мислення, але його некритичне використання здатне призводити до зниження когнітивної активності студентів (Chen et al., 2024; UNESCO, 2023). Це узгоджується з результатами дослідження (Чкана et al., 2025), у якому показано, що ефективність використання штучного інтелекту у навчанні математики безпосередньо залежить від рівня залучення студентів до процедур критичного аналізу отриманих результатів.

Окремий напрям досліджень присвячений аналізу здатності сучасних мовних моделей працювати з математичними задачами різного рівня складності. Зокрема, встановлено, що такі системи ефективно виконують задачі алгоритмічного характеру, однак демонструють суттєві обмеження при роботі із задачами, що потребують концептуального розуміння або побудови стратегії розв'язання (Sapkota & Bondurant, 2024; Frieder et al., 2023). Емпіричні дослідження показують, що середня точність класифікації когнітивної складності задач становить близько 60%, причому моделі мають тенденцію до зміщення в бік задач середнього рівня складності та демонструють труднощі при аналізі задач типу «doing mathematics» (Fox et al., 2026).

Крім того, встановлено, що сучасні моделі штучного інтелекту часто спираються на поверхневі текстові характеристики задач, а не на глибинний аналіз когнітивних процесів, необхідних для їх розв'язання, що обмежує їх здатність до адекватної педагогічної інтерпретації навчальних завдань (Fox et al., 2026; Frieder et al., 2023). Це свідчить про те, що, попри значні можливості, штучний інтелект не може повноцінно замінити діяльність студента у задачах високого когнітивного рівня.

Аналіз сучасних досліджень дозволяє зробити висновок про наявність зв'язку між когнітивною складністю математичних задач і можливістю їх автоматизованого розв'язання: задачі низького когнітивного рівня, що передбачають відтворення алгоритмів, найбільш повно піддаються автоматизації сучасними системами штучного інтелекту; натомість задачі, які вимагають аналізу, побудови стратегій та рефлексії, залишаються складними для автоматизації та потребують активної когнітивної участі студента. Це створює підґрунтя для переосмислення ролі навчальних завдань у математичній освіті та обґрунтовує необхідність розробки таких підходів до організації домашніх завдань, які б зберігали свою дидактичну ефективність в умовах широкого використання штучного інтелекту.

Метою статті є теоретичне обґрунтування та експериментальна перевірка когнітивно-верифікаційного підходу до трансформації домашніх завдань з математичного аналізу в умовах використання систем штучного інтелекту на основі врахування когнітивної складності задач і ступеня їх автоматизованості.

Для досягнення поставленої мети передбачено розв'язання таких завдань:

- проаналізувати сучасні дослідження щодо когнітивної складності математичних задач і можливостей їх автоматизації засобами штучного інтелекту;

- обґрунтувати класифікацію навчальних задач за ступенем їх автоматизованості;
- розробити та реалізувати методіку організації домашніх завдань у курсі математичного аналізу з урахуванням зазначеної класифікації;
- експериментально перевірити вплив запропонованого підходу на результати навчання студентів.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Дослідження проводилося у форматі педагогічного експерименту в умовах дистанційного навчання студентів 2 курсу Сумського державного педагогічного університету імені А. С. Макаренка під час вивчення розділу «Диференціальне числення функцій багатьох змінних». Експеримент тривав 5 тижнів і охоплював теми: основні поняття функції багатьох змінних, їх границя та неперервність, частинні похідні, повний диференціал, екстремуми. У дослідженні взяли участь 10 студентів, однак до подальшого аналізу було включено результати 8 студентів, які систематично виконували навчальні завдання. Двоє студентів через нерегулярну участь у навчальному процесі були виключені з вибірки.

Методика експерименту була спрямована на перевірку гіпотези про те, що реалізація когнітивно-верифікаційного підходу до трансформації домашніх завдань змінює характер когнітивної діяльності студентів і підвищує рівень засвоєння матеріалу. Домашні завдання конструювалися з урахуванням трьох типів задач: стійких до автоматизації, сумісних із використанням штучного інтелекту та інтегрованих із його використанням. Ключовою вимогою до всіх завдань було включення пояснювально-верифікаційного компоненту. Студентам не нав'язувалася жорстка форма подання розв'язань, однак у кожному завданні вимагалось пояснити вибір методу розв'язання, обґрунтувати основні кроки, здійснити перевірку отриманого результату.

У процесі виконання завдань було зафіксовано різний рівень дотримання цієї вимоги. Це дозволило виділити дві підгрупи студентів (по 4 особи): перша – зі стійкою реалізацією пояснювального компоненту, друга – з переважно формальним виконанням завдань. Оцінювання результатів навчальної діяльності здійснювалося за трьома показниками: (1) правильність розв'язання, (2) якість пояснення, (3) здатність до верифікації результату. Кожен показник оцінювався за тривірневою шкалою (0–2 бали), де максимальний сумарний бал за одне завдання становив 6 балів (таблиця 1).

Таблиця 1. Оцінювання результатів навчальної діяльності

	0 балів	1 бал	2 бали
Правильність розв'язання	розв'язання відсутнє або неправильне	розв'язання частково правильне	розв'язання правильне
Якість пояснення	пояснення відсутнє або формальне	пояснення часткове, без цілісної логіки	пояснення послідовне, обґрунтоване та повне
Верифікація результату	перевірка відсутня	перевірка часткова або формальна	перевірка змістовна та коректна

Джерело: авторська розробка

Для фіксації змін у рівні підготовки використовувалися три зрізи: вхідний (на початку вивчення теми), проміжний (через 2–3 тижні) та підсумковий (після завершення розділу). Важливо, що завдання зрізів не були ідентичними, але їх кількість була однаковою (5 завдань), вони будувалися за однаковою структурою і перевіряли одні й ті самі типи умінь: обчислення, пояснення та перевірку.

Крім кількісного аналізу результатів зрізів, проводився якісний аналіз письмових робіт студентів. Особлива увага приділялася типовим помилкам, характеру пояснень і здатності студентів виявляти некоректні розв'язання.

З огляду на невелику вибірку ($n=8$) основний акцент було зроблено на аналізі середніх значень показників, відсоткового приросту результатів та відмінностей між підгрупами.

Додатково оцінювалася динаміка змін за кожним із трьох компонентів (правильність, пояснення, верифікація), що дозволило визначити, які саме аспекти навчальної діяльності зазнають найбільшого впливу.

Для узагальнення отриманих даних використовувалася таблиця результатів проведених зрізів за етапами експерименту (таблиця 2). Значення наведено як середні бали по групах; максимальний бал за кожним показником становить 10, загальний — 30. Підсумкові результати подавалися у відсотках від максимально можливого балу.

Таблиця 2. Результати зрізів студентів за етапами експерименту

Етап	Група	Правильність (макс. 10)	Пояснення (макс. 10)	Верифікація (макс. 10)	Загальний бал (макс. 30)	%
Вхідний	з поясненням	7.25	4.00	3.75	15.00	50%
	без системного пояснення	7.00	3.75	3.50	14.25	48%
Проміжний	з поясненням	8.25	6.00	5.50	19.75	66%
	без системного пояснення	8.00	5.00	4.50	17.50	58%
Підсумковий	з поясненням	9.00	7.25	6.75	23.00	77%
	без системного пояснення	8.50	5.25	4.75	18.50	62%

Джерело: авторська розробка

Аналогічно аналізувалися окремі компоненти оцінювання, що дозволило встановити, що найбільші відмінності спостерігаються саме у показниках пояснення та верифікації.

Таким чином, запропонована методика дозволяє не лише оцінити рівень засвоєння навчального матеріалу, але й дослідити вплив структури задач на характер когнітивної діяльності студентів у середовищі, де використання штучного інтелекту є потенційно доступним.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Аналіз наукових досліджень показує, що когнітивна складність математичних задач є ключовим чинником, який визначає якість навчальних результатів. Водночас сучасні умови використання цифрових технологій і систем штучного інтелекту потребують розширення цього підходу за рахунок урахування можливості автоматизованого розв'язання задач.

Як було зазначено, задачі низького когнітивного рівня, що передбачають відтворення алгоритмів, найбільш повно піддаються автоматизації засобами штучного інтелекту, тоді як задачі, що вимагають аналізу, побудови міркувань і рефлексії, залишаються складними для автоматизованого виконання. Це дозволяє встановити зв'язок між когнітивною складністю задачі та ступенем її автоматизованості.

На основі цього зв'язку нами запропоновано когнітивно-верифікаційний підхід до трансформації домашніх завдань, який поєднує два виміри: когнітивну складність та можливість автоматизованого розв'язання засобами штучного інтелекту. Цей підхід передбачає класифікацію навчальних задач за ступенем автоматизованості, включення в структуру домашніх завдань задач різних типів, обов'язкове доповнення задач пояснювально-верифікаційним компонентом, оцінювання не лише результату, а й процесу міркування.

У межах цього підходу виділено три типи задач:

- *задачі, стійкі до автоматизації.* Їх розв'язання передбачає побудову міркувань, обґрунтування вибору методу, аналіз альтернативних підходів або створення власних прикладів. Такі задачі відповідають високому рівню когнітивної складності (doing mathematics) і не можуть бути коректно виконані без активної участі студента;

- *задачі, сумісні з використанням штучного інтелекту за умови критичної перевірки.* До цієї групи належать задачі, які можуть бути формально розв'язані засобами штучного інтелекту, однак потребують обов'язкової перевірки, аналізу результату та виявлення можливих помилок. Вони відповідають проміжному рівню когнітивної складності (procedures with connections);

- *задачі, інтегровані з використанням штучного інтелекту.* Це задачі, у яких використання штучного інтелекту є невід'ємною частиною діяльності. ШІ виконує обчислювальні операції, тоді як студент здійснює постановку задачі, інтерпретацію результатів та формулювання висновків. Такі задачі можуть поєднувати елементи різних рівнів когнітивної складності (Чкана, 2026).

Для забезпечення відтворюваності класифікації у дослідженні використовувалися такі критерії віднесення задач:

- характер когнітивної діяльності (відтворення, встановлення зв'язків, побудова міркувань);
- можливість отримання коректної відповіді засобами штучного інтелекту без участі студента;
- необхідність інтерпретації або перевірки результату.

Узагальнення запропонованої класифікації подано в таблиці 3.

Таблиця 3. Типи задач при когнітивно-верифікаційному підході

Тип задач	Характеристика	Приклад	Когнітивний рівень	Роль ШІ
Стійкі до автоматизації	потребують обґрунтування, аналізу, створення прикладів	довести або спростувати твердження про екстремум	високий (doing mathematics)	не замінює діяльність
Сумісні з ШІ	формально розв'язуються, але потребують перевірки	обчислити частинні похідні та пояснити кроки	середній (procedures with connections)	джерело відповіді, але не істини
Інтегровані з ШІ	ШІ є частиною задачі	проаналізувати помилковий розв'язок ШІ	змішаний	інструмент навчання

Джерело: авторська розробка

Наведемо конкретні приклади задач, що ілюструють відмінності між виділеними типами.

До задач, сумісних із використанням штучного інтелекту за умови критичної перевірки, належать, зокрема, задачі на обчислення частинних похідних з обов'язковим поясненням кожного кроку. Наприклад, при знаходженні частинних похідних функції $z = x^2y + e^{xy}$ від студента вимагається не лише отримати результат, але й пояснити застосовані правила диференціювання та перевірити правильність розв'язання. У цьому випадку штучний інтелект може виступати джерелом відповіді, однак навчальна діяльність переноситься у площину аналізу та верифікації.

До задач, стійких до автоматизації, належать задачі, що потребують побудови міркувань і узагальнень. Наприклад, задача на пояснення того, чому існування всіх частинних похідних не гарантує диференційовності функції, з наведенням власного прикладу, не може бути коректно виконана без глибокого розуміння матеріалу. Аналогічно, дослідження границі функції двох змінних вздовж різних траєкторій вимагає від студента самостійного аналізу та інтерпретації результатів.

Окрему групу становлять задачі, інтегровані з використанням штучного інтелекту. Зокрема, ефективними є завдання на аналіз помилкових розв'язків, згенерованих системами штучного інтелекту. Наприклад, студенту може бути запропоновано проаналізувати твердження $\frac{\partial}{\partial x}(e^{xy}) = e^{xy}$ з метою виявлення помилки та пояснення її причини. Такі задачі формують здатність до критичного ставлення до результатів роботи інтелектуальних систем.

Запропонований когнітивно-верифікаційний підхід до трансформації домашніх завдань реалізується як цілісна система організації навчальної діяльності, що поєднує змістовий, діяльнісний та оціночний компоненти. Його впровадження передбачає не заміну традиційних задач, а їх цілеспрямовану модифікацію з урахуванням можливості автоматизованого виконання засобами штучного інтелекту (рисунок 1).

КОГНІТИВНО-ВЕРИФІКАЦІЙНИЙ ПІДХІД ДЛЯ ТРАНСФОРМАЦІЇ ДОМАШНІХ ЗАВДАНЬ



ІНТЕГРОВАНА СИСТЕМА НАВЧАННЯ: ЗМІСТ, ДІЯЛЬНІСТЬ, ОЦІНЮВАННЯ

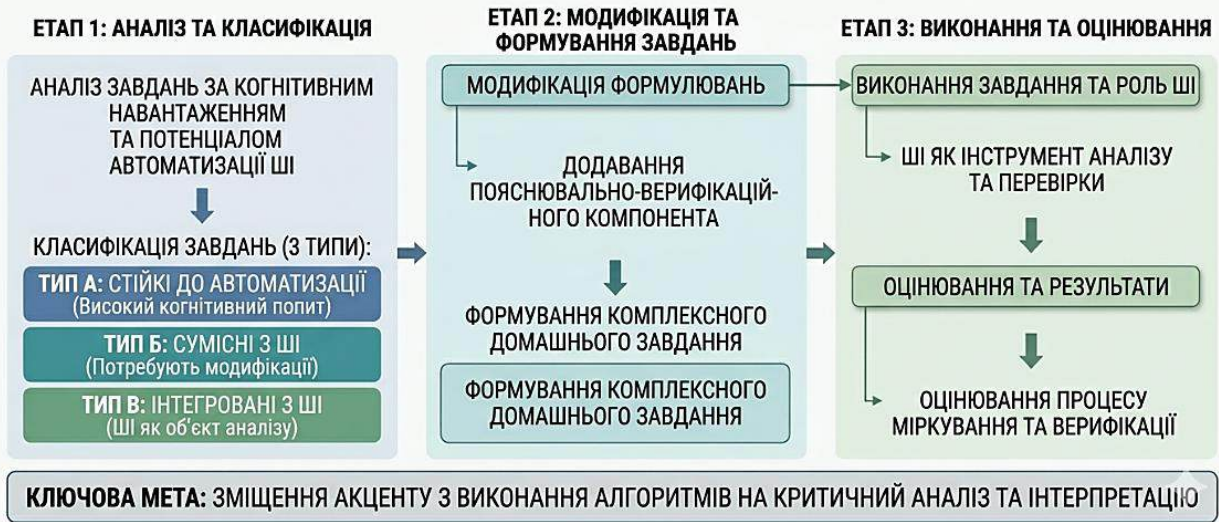


Рис. 1. Модель когнітивно-верифікаційного підходу для трансформації домашніх завдань

Джерело: згенеровано за допомогою ШІ (<https://gemini.google.com>) на основі авторського опису

На початковому етапі здійснюється аналіз навчального матеріалу та виділення типових задач, характерних для відповідної теми. Кожна задача розглядається з позиції її когнітивного навантаження та можливості отримання готового результату за допомогою інтелектуальних систем без залучення осмисленої діяльності студента. Це дозволяє віднести її до одного з трьох типів: стійких до автоматизації, сумісних із використанням штучного інтелекту або інтегрованих із ним.

Подальший етап пов'язаний із модифікацією формулювання задач. Ключовим елементом є включення пояснювально-верифікаційного компоненту, який передбачає необхідність обґрунтування вибору методу розв'язання, пояснення основних кроків, аналізу отриманого результату та його перевірки. При цьому важливо, що сама математична сутність задачі може залишатися незмінною, однак змінюється характер діяльності студента, яка переходить від виконання алгоритмічних дій до їх усвідомлення, інтерпретації та контролю.

Формування домашніх завдань у межах підходу здійснюється як поєднання задач різних типів. Зокрема, задачі, що можуть бути автоматизовані, доповнюються вимогами пояснення і перевірки, тоді як задачі високого когнітивного рівня орієнтовані на побудову міркувань, аналіз і створення власних прикладів. Окрему роль відіграють задачі, інтегровані з використанням штучного інтелекту, у яких предметом діяльності стає аналіз результатів, отриманих за допомогою таких систем.

Організація виконання домашніх завдань не передбачає жорстких обмежень щодо використання штучного інтелекту. Навпаки, допускається його застосування як інструменту, однак ключовою вимогою є обов'язкова рефлексія отриманого результату. Це змінює функцію штучного інтелекту в навчальному процесі: з джерела готових відповідей він перетворюється на об'єкт аналізу та перевірки.

Оцінювання результатів навчальної діяльності в межах підходу також зазнає змін і орієнтується не лише на правильність отриманого результату, але й на якість пояснення та здатність до верифікації. Таким чином, об'єктом оцінювання стає не лише продукт діяльності, але й процес міркування, що дозволяє більш адекватно відобразити рівень сформованості математичних компетентностей.

Аналіз результатів педагогічного експерименту показав, що на початковому етапі студенти демонстрували близький рівень підготовки. Середній результат вхідного тестування становив близько 48–50% від максимально можливого бала, при цьому більшість студентів успішно виконували обчислювальні завдання, однак відчували труднощі з поясненням своїх дій і перевіркою отриманих результатів.

Уже на проміжному етапі (через 2–3 тижні) було зафіксовано розходження в динаміці результатів. Студенти, які систематично надавали пояснення до розв'язань, продемонстрували зростання середнього показника до приблизно 66%, тоді як у групі з формальним підходом цей показник становив близько 58%. При цьому відмінності стосувалися не стільки правильності обчислень, скільки здатності пояснювати виконані дії та здійснювати перевірку результатів.

Найбільш виражені відмінності спостерігалися у підсумковому тестуванні. Середній результат у групі студентів, які систематично виконували пояснювальний компонент, становив близько 77%, тоді як у другій групі – близько 62%.

Таким чином, різниця між групами досягала приблизно 15%, що є суттєвим з огляду на невелику вибірку та однакові умови навчання.

Більш детальний аналіз показав, що за показником правильності обчислень відмінності між групами були відносно незначними (у межах 4–5%). Натомість за показниками пояснення та верифікації різниця була значно більшою. Зокрема, у підсумковому тестуванні середній рівень виконання пояснювального компоненту в групі зі стійкою реалізацією підходу становив близько 72–73% від максимального бала, тоді як у другій групі – близько 50–52%. Аналогічна ситуація спостерігалася і щодо верифікації результатів: відповідні показники становили приблизно 67–68% проти 47–48%.

Якісний аналіз письмових робіт підтвердив ці відмінності. У студентів, які регулярно пояснювали свої дії, значно рідше зустрічалися типові помилки, пов'язані з некоректним застосуванням формул, пропуском обмежень або неправильним трактуванням результату. У випадках, коли такі помилки виникали, студенти частіше самостійно їх виявляли і виправляли. Натомість у роботах студентів, які обмежувалися формальним виконанням завдань, помилки мали більш стійкий характер і часто повторювалися. Характерною особливістю цієї групи була відсутність перевірки результатів навіть у випадках очевидної некоректності відповіді.

Отримані результати свідчать, що включення пояснювального компоненту до структури домашніх завдань не лише підвищує рівень засвоєння матеріалу, але й змінює характер навчальної діяльності. Зокрема, спостерігається перехід від виконання алгоритмічних дій до усвідомленого аналізу та контролю результатів. Загалом реалізація когнітивно-верифікаційного підходу спрямована на те, щоб перенести центр навчальної діяльності з виконання алгоритмів на їх осмислення, інтерпретацію та критичний аналіз, що набуває принципового значення в умовах широкого використання систем штучного інтелекту.

ОБГОВОРЕННЯ

Отримані результати доцільно розглядати не лише як підтвердження ефективності пояснювального компоненту, але й як емпіричне свідчення впливу типу навчальних задач на характер когнітивної діяльності студентів.

Зокрема, результати дослідження узгоджуються з положеннями теорії когнітивної складності математичних задач, зокрема моделі TAG, відповідно до яких задачі, що вимагають аналізу, обґрунтування та побудови міркувань, забезпечують більш глибокі навчальні результати порівняно із задачами алгоритмічного типу. Водночас отримані результати уточнюють ці положення в умовах використання штучного інтелекту: вирішальним виявляється не лише початковий тип задачі, але й спосіб її виконання. Додавання пояснювального компоненту може змінювати характер діяльності студента, переводячи задачу з алгоритмічного рівня у площину когнітивно складної діяльності. Це дозволяє розглядати пояснювальну діяльність як механізм підвищення когнітивного навантаження без зміни формулювання задачі.

Отримані результати також доповнюють сучасні дослідження щодо використання цифрових технологій у математичній освіті, у яких підкреслюється зміщення акценту з виконання обчислень на інтерпретацію результатів. У цьому дослідженні показано, що в умовах використання систем штучного інтелекту таке зміщення стає не лише бажаним, але й необхідним для збереження навчальної функції домашніх завдань.

У контексті досліджень можливостей штучного інтелекту отримані результати узгоджуються з висновками про те, що сучасні мовні моделі демонструють високу ефективність при виконанні процедурних задач, але мають суттєві обмеження при розв'язанні задач, що потребують глибокого розуміння та побудови міркувань. У цьому сенсі запропонований когнітивно-верифікаційний підхід до трансформації домашніх завдань дозволяє цілеспрямовано змінювати характер задач таким чином, щоб зменшити ефект їх автоматизованого виконання.

Особливо показовим є те, що навіть за однакових умов навчання і однакових завдань відмінності у результатах визначалися характером діяльності студентів. Це підтверджує положення про те, що когнітивна складність задачі не є фіксованою характеристикою її формулювання, а залежить від способу її виконання.

Таким чином, результати дослідження дозволяють зробити узагальнення, що в умовах використання штучного інтелекту ефективність навчальних задач визначається не лише їх змістом, але й тим, чи вимагають вони від студента діяльності, яка не може бути делегована інтелектуальним системам. Запропонований підхід дозволяє реалізувати цей принцип на практиці через цілеспрямовану трансформацію структури домашніх завдань.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

У результаті проведеного дослідження встановлено, що традиційні домашні завдання з математичного аналізу, орієнтовані переважно на виконання алгоритмічних процедур, в умовах широкого використання систем штучного інтелекту втрачають свою ефективність як засіб формування математичних компетентностей. Показано, що між когнітивною складністю задачі та можливістю її автоматизованого розв'язання існує обернена залежність: задачі процедурного типу легко автоматизуються, тоді як задачі, що вимагають аналізу, обґрунтування та рефлексії, залишаються стійкими до автоматизації та забезпечують активну пізнавальну діяльність студентів. На цій основі обґрунтовано когнітивно-верифікаційний підхід до класифікації навчальних задач за ступенем їх автоматизованості, який доповнює традиційні уявлення про когнітивну складність і враховує умови використання штучного інтелекту в навчальному процесі.

Експериментально підтверджено, що включення пояснювального компоненту до структури домашніх завдань змінює характер навчальної діяльності студентів, переводячи задачі з алгоритмічного рівня у площину когнітивно складної діяльності. Це проявляється у зростанні здатності до пояснення, верифікації результатів та зниженні кількості стійких помилок. Встановлено, що навіть за однакових умов навчання вирішальним фактором є не лише тип задачі, але й спосіб її виконання: вимога пояснення фактично виступає механізмом підвищення когнітивної складності задачі та обмеження можливостей її формального виконання.

Таким чином, отримані результати підтверджують доцільність трансформації домашніх завдань на основі поєднання різних типів задач і включення обов'язкового пояснювального компоненту як засобу адаптації навчального процесу до умов використання штучного інтелекту.

Перспективи подальших досліджень пов'язані з розширенням вибірки та перевіркою запропонованого підходу на інших розділах математичних дисциплін. Окремого дослідження потребує розробка цифрових інструментів, які б підтримували пояснювальну діяльність студентів, а також аналіз впливу різних моделей взаємодії зі штучним інтелектом на формування математичного мислення

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автор підтверджує відсутність фінансових, особистих чи інших інтересів, що можуть розглядатися як потенційний конфлікт інтересів щодо публікації цієї статті.

ДЖЕРЕЛА ФІНАНСУВАННЯ

Робота виконана за відсутності фінансової підтримки з боку будь-яких організацій.

ДОСТУПНІСТЬ ДАНИХ

Дані можуть бути надані за обґрунтованим запитом відповідному автору.

ВИКОРИСТАННЯ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Засоби ШІ, зокрема, Gemini було використано для візуалізації моделі запропонованого в статті когнітивно-верифікаційного підходу та ChatGPT для поліпшення якості мови. Автор критично перевіряв та відредагував отриманий контент і несе повну відповідальність за його зміст.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- Bykov, V. Y., Ovcharuk, O. V., Ivaniuk, I. V., Pinchuk, O. P., & Galperina, V. O. (2022). The current state of the use of digital tools for organization of distance learning in general secondary education institutions: 2022 results. *Information Technologies and Learning Tools*, 90(4), 1–18. <https://doi.org/10.33407/itlt.v90i4.5036>
- Chen, N.-S., Smyrnova-Trybulska, E., Morze, N., Ślósarz, A., Glushkova, T., Przybyła-Kasperek, M., ... Gubo, Štefan. (2024). Education in the Era of AI, Enhancing Skills, Challenges and Perspectives – International Context and National Experience. *International Journal of Research in E-Learning*, 10(2), 1–30. <https://doi.org/10.31261/IJREL.2024.10.2.06>
- Drushlyak, M., Lukashova, T., Ielizarenko, D., & Nadtochy, O. (2025). Transformation of homework in mathematics in the digital era. In *Proceedings of the 48th International Convention on Information, Communication and Electronic Technology (MIPRO 2025)*. IEEE. <https://doi.org/10.1109/MIPRO65660.2025.11131775>
- Fox D. S., Robles B. L., DiPietro Brovey E., & Schunn C. D. Baseline performance of AI tools in classifying cognitive demand of mathematical tasks. 2026. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2603.03512>
- Frieder, S., Pinchetti, L., Griffiths, R.-R., Salvatori, T., Lukasiewicz, T., Petersen, P. C., & Berner, J. (2023). *Mathematical capabilities of ChatGPT. Advances in Neural Information Processing Systems*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2301.13867>
- Hsu, H.-Y., Yao, C.-Y., Lin, C.-Y., & Chen, Y.-H. (2023). A review of the mathematical tasks framework and levels of cognitive demand. In J. Cai, G. J. Stylianides, & P. A. Kenney (Eds.), *Research studies on learning and teaching of mathematics: Dedicated to Edward A. Silver* (pp. 231–252). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-35459-5_10
- Hwang, G.-J., & Tu, Y.-F. (2021). Roles and research trends of artificial intelligence in mathematics education: A bibliometric mapping analysis and systematic review. *Mathematics*, 9(6), Article 584. <https://doi.org/10.3390/math9060584>
- Kasneci, E., Sessler, K., Küchemann, S., et al. (2023). ChatGPT for good? On opportunities and challenges of large language models for education. *Learning and Individual Differences*, 103, Article 102274. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2023.102274>
- Sapkota, B., & Bondurant, L. (2024). Assessing concepts, procedures, and cognitive demand of ChatGPT-generated mathematical tasks. *International Journal of Technology in Education*, 7(2), 218–238. <https://doi.org/10.46328/ijte.677>
- Stein, M. K., & Lane, S. (1996). Instructional Tasks and the Development of Student Capacity to Think and Reason: An Analysis of the Relationship between Teaching and Learning in a Reform Mathematics Project. *Educational Research and Evaluation*, 2(1), 50–80. <https://doi.org/10.1080/1380361960020103>
- Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(4), 268–275. <https://doi.org/10.5951/MTMS.3.4.0268>
- UNESCO. (2023). *Guidance for generative AI in education and research*. UNESCO. <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000386693>
- Жалдак, М. І., Рамський, Ю. С., & Рафальська, М. В. (2012). *Інформаційні технології навчання математики*. НПУ імені М. П. Драгоманова.
- Триус, Ю. В. (2010). Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математичних дисциплін у ВНЗ: проблеми, стан і перспективи. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання*, 9(16), 20–34.
- Чкана, Я. (2026). Про домашні завдання з математичного аналізу в епоху штучного інтелекту. У *Тези доповідей VII Міжнародної наукової конференції «Актуальні проблеми теорії та методики навчання математики: до 100-річчя з дня народження Григорія Бевза»* (с. 89–91). УДУ імені Михайла Драгоманова.
- Чкана, Я. О., Мартиненко, О. В., & Герасименко, В. О. (2025). Критичне мислення майбутніх учителів математики у взаємодії зі штучним інтелектом при розв'язуванні математичних задач. *Педагогічна академія: наукові записки*, 15. <https://doi.org/10.5281/zenodo.15095182>

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Bykov, V. Y., Ovcharuk, O. V., Ivaniuk, I. V., Pinchuk, O. P., & Galperina, V. O. (2022). The current state of the use of digital tools for organization of distance learning in general secondary education institutions: 2022 results. *Information Technologies and Learning Tools*, 90(4), 1–18. <https://doi.org/10.33407/itlt.v90i4.5036>
2. Chen, N.-S., Smyrnova-Trybulska, E., Morze, N., Ślósarz, A., Glushkova, T., Przybyła-Kasperek, M., ... Gubo, Štefan. (2024). Education in the Era of AI, Enhancing Skills, Challenges and Perspectives – International Context and National Experience. *International Journal of Research in E-Learning*, 10(2), 1–30. <https://doi.org/10.31261/IJREL.2024.10.2.06>
3. Drushlyak, M., Lukashova, T., Ielizarenko, D., & Nadtochyj, O. (2025). Transformation of homework in mathematics in the digital era. In *Proceedings of the 48th International Convention on Information, Communication and Electronic Technology (MIPRO 2025)*. IEEE. <https://doi.org/10.1109/MIPRO65660.2025.11131775>
4. Fox D. S., Robles B. L., DiPietro Brovey E., & Schunn C. D. Baseline performance of AI tools in classifying cognitive demand of mathematical tasks. 2026. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2603.03512>
5. Frieder, S., Pinchetti, L., Griffiths, R.-R., Salvatori, T., Lukaszewicz, T., Petersen, P. C., & Berner, J. (2023). *Mathematical capabilities of ChatGPT. Advances in Neural Information Processing Systems*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2301.13867>
6. Hsu, H.-Y., Yao, C.-Y., Lin, C.-Y., & Chen, Y.-H. (2023). A review of the mathematical tasks framework and levels of cognitive demand. In J. Cai, G. J. Stylianides, & P. A. Kenney (Eds.), *Research studies on learning and teaching of mathematics: Dedicated to Edward A. Silver* (pp. 231–252). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-35459-5_10
7. Hwang, G.-J., & Tu, Y.-F. (2021). Roles and research trends of artificial intelligence in mathematics education: A bibliometric mapping analysis and systematic review. *Mathematics*, 9(6), Article 584. <https://doi.org/10.3390/math9060584>
8. Kasneci, E., Sessler, K., Küchemann, S., et al. (2023). ChatGPT for good? On opportunities and challenges of large language models for education. *Learning and Individual Differences*, 103, Article 102274. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2023.102274>
9. Sapkota, B., & Bondurant, L. (2024). Assessing concepts, procedures, and cognitive demand of ChatGPT-generated mathematical tasks. *International Journal of Technology in Education*, 7(2), 218–238. <https://doi.org/10.46328/ijte.677>
10. Stein, M. K., & Lane, S. (1996). Instructional Tasks and the Development of Student Capacity to Think and Reason: An Analysis of the Relationship between Teaching and Learning in a Reform Mathematics Project. *Educational Research and Evaluation*, 2(1), 50–80. <https://doi.org/10.1080/1380361960020103>
11. Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(4), 268–275. <https://doi.org/10.5951/MTMS.3.4.0268>
12. UNESCO. (2023). *Guidance for generative AI in education and research*. UNESCO. <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000386693>
13. Zhaldak, M. I., Ramskyi, Yu. S., & Rafalska, M. V. (2012). *Informatsiini tekhnologii navchannia matematyky [Information technologies of mathematics teaching]*. NPU imeni M. P. Drahomanova. (in Ukrainian)
14. Tryus, Yu. V. (2010). Kompiuterno-orientovani metodychni systemy navchannia matematychnykh dystsyplin u VNZ: problemy, stan i perspektyvy [Computer-oriented methodological systems of teaching mathematical disciplines in universities: problems, status and prospects]. *Naukovyi chasopys NPU imeni M. P. Drahomanova. Serii 2. Kompiuterno-orientovani systemy navchannia – Scientific journal of NPU named after M. p. Dragomanov. Series 2. Computer-oriented teaching systems*, 9(16), 20–34. (in Ukrainian)
15. Chkana, Ya. (2026). Pro domashni zavdannya z matematychnoho analizu v epokhu shtuchnoho intelektu [On homework assignments in mathematical analysis in the era of artificial intelligence]. U Tezy dopovidei VII Mizhnarodnoi naukovoï konferentsii «Aktualni problemy teorii ta metodyky navchannia matematyky: do 100-richchia z dnia narodzhennia Hryhoriia Bevza – Actual problems of the theory and methods of teaching mathematics: to the 100th anniversary of the birth of Grigoriy Bevza» (s. 89–91). UDU imeni Mykhaila Drahomanova. (in Ukrainian)
16. Chkana, Ya. O., Martynenko, O. V., & Herasymenko, V. O. (2025). Krytychne myslennia maibutnikh uchyteliv matematyky u vzaiemodii zi shtuchnym intelektom pry rozviazuvanni matematychnykh zadach [Critical thinking of future mathematics teachers in interaction with artificial intelligence when solving mathematical problems]. *Pedahohichna akademiia: naukovi zapysky – Pedagogical Academy: Scientific Notes*, 15. <https://doi.org/10.5281/zenodo.15095182> (in Ukrainian)

| Матеріал надійшов до редакції: 24.01.2026 р. | Прийнято до друку: 15.03.2026 р. | Опубліковано: 30.04.2026 р. |



ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ЗАВАДИ ТА НАДІЙНІСТЬ ПЕРЕДАВАННЯ ДАНИХ У НАВЧАЛЬНИХ ЕКСПЕРИМЕНТАХ ІЗ SDR

Володимир ШАМОНЯ ✉
Сумський державний педагогічний університет
імені А.С.Макаренка, Україна
v.shamonya@fizmatsspu.sumy.ua
<https://orcid.org/0000-0002-3201-4090>

Владислав БЕСПАЛИЙ
Сумський державний педагогічний університет
імені А.С.Макаренка, Україна
v.bespalyi@fizmatsspu.sumy.ua
<https://orcid.org/0009-0009-0630-5183>

ELECTROMAGNETIC INTERFERENCE AND DATA TRANSMISSION RELIABILITY IN SDR-BASED EDUCATIONAL EXPERIMENTS

Volodymyr SHAMONIA
Sumy State Pedagogical University
named after A. S. Makarenko, Ukraine
v.shamonya@fizmatsspu.sumy.ua
<https://orcid.org/0000-0002-3201-4090>

Vladyslav BESPALYI
Sumy State Pedagogical University
named after A. S. Makarenko, Ukraine
v.bespalyi@fizmatsspu.sumy.ua
<https://orcid.org/0009-0009-0630-5183>

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. Стаття розкриває проблему поєднання і засвоєння уявлень про сигнал, завади та канал зв'язку з якістю передавання даних інформаційною системою (ІС) за допомогою технічних засобів навчання (SDR і простих радіомодулів). Метою статті є систематизація практик виявлення та опису електромагнітних завод (ЕМЗ) і оцінювання надійності передавання даних.

Матеріали і методи. Огляд виконано через інтегрування різномірних джерел: інженерні дослідження коекзистенції технологій у 2.4 GHz ISM-діапазоні, публікації про SDR-лабораторії та стандарти як орієнтир коректності вимірювань.

Результати. Основними результатами є: таксономія практик ЕМЗ-спостереження, таксономія метрик надійності та матриця відповідності «практика ЕМЗ - метрика надійності», доповнена рамкою впровадження лабораторних робіт. Визначено межі використання радіомодуля: пристрій розглянуто як навчальний засіб спостереження, а стандарти – як джерело вимог до валідності процедури, а не як вимога до сертифікаційних вимірювань. Наукова новизна дослідження полягає у концептуальній систематизації практик виявлення та опису ЕМЗ і практик оцінювання надійності передавання даних у такій формі, яка придатна для викладання фізичних основ ІС.

Висновки. Систематизація практик дозволяє проектувати лабораторні завдання з наперед визначеним причинним механізмом та прозорими вимогами до результату. Подальші розвідки можуть бути спрямовані на адаптацію матриці до змішаного і дистанційного форматів навчання; важливим є розширення предметного поля за межі одного діапазону та одного класу пристроїв: порівняння навчальних ефектів і типових помилок інтерпретації для різних технологій (наприклад, Wi-Fi, Bluetooth) і різних умов середовища дозволить уточнити універсальні та специфічні елементи запропонованої матриці й рамки.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: фізичні основи ІС; технічні засоби навчання; інформаційна система; електромагнітні завади; електромагнітна сумісність; SDR; відтворюваність лабораторних вимірювань, фізична освіта.

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Шамо́ня В., Бєспа́лий В. Електромагнітні завади та надійність передавання даних у навчальних експериментах із SDR. *Фізико-математична освіта*, 2026. Том 41. № 2. С. 94-100. <https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i2-06>.

ABSTRACT

Formulation of the problem. This article explains how, within the course Physical Foundations of Information Systems, concepts of signal, interference, and communication channel can be connected to practical metrics of data transmission quality using instructional technical tools (software-defined radio, SDR, and simple radio modules). The aim is to systematize practices of (a) detecting and describing electromagnetic interference (EMI) and (b) assessing data transmission reliability, thereby providing a methodological bridge between physical manifestations in the radio environment and network-level outcomes (PER/PRR/throughput/latency/outages).

Materials and methods. The review is conducted as a scoping review, which enables integration of heterogeneous sources: engineering studies on technology coexistence in the 2.4 GHz ISM band, educational publications on SDR laboratories, and standards used as reference points for measurement rigor.

Results. The main results include: a taxonomy of EMI observation practices, a taxonomy of reliability metrics, and a correspondence matrix “EMI practice - reliability metric,” complemented by an implementation framework for laboratory work and a minimal package of reproducibility artifacts. The article delineates the limits of SDR use: the device is treated as an educational observation tool, while standards are used as a source of requirements for procedural validity rather than as a basis for certification measurements. Scientific novelty lies in a conceptual systematization of EMI detection/description practices and reliability assessment practices, in a form suitable for teaching the Physical Foundations of Information Systems course using instructional technical tools.

Conclusions. The systematization of practices is presented as a correspondence matrix between types of EMI observations and reliability metrics, enabling the design of laboratory tasks with a predefined causal mechanism and transparent requirements for outcomes. Further research could focus on adapting the matrix for blended and distance-learning formats. It is important to expand the scope beyond a single range and a single class of devices: comparing learning outcomes and typical interpretation errors across different technologies (e.g., Wi-Fi, Bluetooth) and different environmental conditions will help refine the universal and specific elements of the proposed matrix and framework.

KEYWORDS: physical foundations of information systems; instructional technical tools; information systems; electromagnetic interference; electromagnetic compatibility; reproducibility of laboratory measurements; physics education.

FOR CITATION: Shamonia, V., & Bospalyi, V. (2026). Electromagnetic interference and data transmission reliability in SDR-based educational experiments. *Physical and Mathematical Education*, 41(2), 94-100. <https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i2-06>.

ВСТУП

Постановка проблеми. Курс «фізичні основи ІС» потребує такої дидактичної логіки, яка дозволяє здобувачу освіти перейти від фізичних явищ на рівні сигналу та середовища передавання даних до пояснення поведінки інформаційної системи через вимірювані показники її якості. У цій логіці електромагнітні завади не є абстрактним «шумом», а постають як сукупність керованих проявів електромагнітного середовища, що відображаються на надійності передавання даних і стабільності зв'язку. Водночас у курсах, споріднених із мікроелектронікою та комп'ютерною архітектурою інформаційних систем, уже накопичено досвід, який показує: технічні засоби навчання працюють найкраще тоді, коли забезпечують не лише наочність, а й підкріплюють пояснення результату. У вітчизняних дослідженнях підкреслено продуктивність наочного моделювання цифрових компонентів для засвоєння складних тем мікроелектроніки й архітектури комп'ютера (Шамоня та ін., 2025a), а також показано потенціал віртуальних середовищ (зокрема, Proteus) для візуалізації процесів і формування інженерного бачення схем і систем (Шамоня та ін., 2025b). У роботах, присвячених STEM-інтеграції, обґрунтовано, що поєднання інженерних задач, цифрових інструментів і практикоорієнтованих підходів до навчання підсилює розуміння фізичних основ функціонування технічних систем та робить можливою перевірку навчальних результатів (Семеніхіна та ін., 2025). Важливими є й результати про використання відкритих освітніх платформ для формування інженерного мислення в курсах мікроелектроніки (Дементьев & Юрченко, 2025): вони підкреслюють значення доступності інструментів і прозорості процедур, що напряду переноситься на лабораторії з радіомодулями, де налаштування та параметри спостереження визначають коректність висновків. Додатково міжнародний досвід застосування цифрових технологій у навчанні фізики показує, що цифрові інструменти найбільш ефективні тоді, коли не підмінюють зміст, а організують експеримент, інтерпретацію даних і рефлексію щодо отриманого результату (Yurchenko et al., 2023). Ці підходи є релевантними й для вивчення електромагнітних завад, однак тут з'являється додатковий методичний виклик. Наочність спектрограм або графіків сама по собі не гарантує їх розуміння: здобувач освіти може відтворити «картинку» спектра, але не пояснити, чому саме за певної структури завад зменшується частка успішно прийнятих пакетів або зростає нерівномірність затримки передавання даних.

Метою статті є концептуальна систематизація практик визначення та опису електромагнітних завад у навчальних експериментах із використанням SDR і простих радіомодулів, а також практик оцінювання надійності передавання даних у присутності завад. Результатом огляду запропоновано: (1) таксономію практик «спостереження/виявлення завад»; (2) матрицю відповідності між типами практик і метриками надійності; (3) рамку впровадження таких практик у лабораторних заняттях, яка задає послідовність дій і мінімальний набір артефактів відтворюваності. Така постановка проблеми узгоджується з наявними педагогічними напрацюваннями у сфері мікроелектроніки й цифрового моделювання (Шамоня та ін., 2025a; Семеніхіна та ін., 2025), але переносить акцент на специфічний для ІС перехід від фізики електромагнітного середовища до системних показників надійності.

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Поняття електромагнітних завад (ЕМЗ) в цій роботі використано для опису фізичних впливів, що змінюють спостережувані параметри сигналу та, як наслідок, показники надійності передавання даних. Натомість електромагнітна сумісність (ЕМС) розглядається як категорія, що має стандартизовані процедури й вимоги до вимірювальної апаратури. У навчальному середовищі важливо не підмінювати одне іншим. SDR і недорогі радіомодулі доцільно трактувати як технічні засоби навчання, які дозволяють відтворити причинно-наслідкові зв'язки і сформулювати інтерпретацію, але не як засоби сертифікаційного вимірювання електромагнітних завад у нормативному сенсі. Тому в огляді акцент зроблено на методичній коректності спостереження: сталість параметрів вимірювання, контроль переважанення приймача, документування налаштувань, відокремлення фізичних ефектів від слідів використання інструмента.

SDR у навчальній лабораторії виконує роль «спостерігача» спектра та часової структури активності в діапазоні. Це відкриває шлях до важливих з методичної точки зору запитань: що саме означає «зайнятий канал»; чому короткі імпульсні події можуть погіршувати надійність сильніше, ніж стабільний фон; як просторові чинники (відстань, орієнтація антен, екранування) впливають на ймовірність приймання пакетів даних. Однак зміна ширини смуги приймання, параметрів FFT, вікна усереднення, порогів визначення, а також неконтрольоване переважанення вхідного тракту здатні породити висновки, які виглядають переконливо, але не відтворюються. Тому здобувач освіти має навчитися не лише «бачити спектр», а й аргументувати, чому вимірювання є достатньо надійним, щоб робити висновки про поведінку інформаційної системи.

Саме тому доцільно описати практики фіксації та інтерпретації завад (спектральних, часових, просторових і процедурних) та практики оцінювання надійності передавання даних. Їх поєднання у матриці відповідності дозволить проєктувати лабораторні завдання так, щоб технічні засоби навчання працювали на пояснення причин того, які параметри електромагнітного середовища спричиняють зміну надійності і які кроки потрібно виконати, щоб такий висновок зробити.

МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Дослідження проведено у форматі огляду: якісно аналізувалися інженерні дослідження, методичні описи лабораторій із SDR, а також нормативні документи, що задають вимоги до вимірювань і термінології. Такий тип огляду доцільний, коли потрібно не оцінити ефект, а описати обсяг і структуру наявних підходів, виділити повторювані практики та запропонувати їх систематизацію. Методологічно огляд спирається на рамку Arksey & O'Malley (2005) і подальші уточнення щодо етапів і якості звітності; звітування структурується з урахуванням PRISMA-ScR (Tricco et al., 2018).

Пошук здійснювався за чотирма кластерами запитів. Перший кластер охоплював роботи про інтерференцію та коекзистенцію технологій у неліцензованих діапазонах (насамперед 2.4 GHz ISM) з кількісними метриками надійності (BER/PER/PRR/throughput/latency). Другий кластер охоплював джерела, у яких описано практики спектрального спостереження та оцінювання активності в каналі (PSD, спектрограма, зайнятість каналу, енергетичне детектування) і їхні

обмеження. Третій кластер охоплював освітні публікації, що розглядають SDR як технічний засіб навчання для лабораторій з теорії зв'язку, обробки сигналів та мережевих вимірювань. Четвертий кластер включав стандарти і регуляторні документи як рамкові орієнтири того, як у фаховій практиці описують співіснування в ISM-діапазоні та вимоги до вимірювальної апаратури/процедур (Shin et al., 2007b).

Критеріями включення були: (1) наявність явного зв'язку між характеристиками інтерференції або умовами спектрального середовища та метриками надійності передавання даних; (2) достатній опис методики вимірювання або моделювання (щоб її можна було перетворити на навчальну практику); (3) релевантність до лабораторних робіт із доступними технічними засобами навчання (SDR, прості радіомодулі, програмні інструменти на кшталт GNU Radio). Виключалися популярні матеріали без методики та джерела, де спектральні спостереження не пов'язані з індикаторами надійності. Дані з джерел “картувалися” у двовимірну структуру: (а) практика визначення/опису завод (спектральна, часова, просторова, процедурна), (б) метрика надійності (BER/PER, PRR, throughput/goodput, latency/jitter, outages). Результатом картування стала матриця відповідності (Arksey & O'Malley, 2005).

Запропонована рамка впровадження орієнтована на методичне завдання: перетворити роботу з SDR і радіомодулями з демонстрації обладнання на формування здатності здобувачів освіти пояснювати поведінку інформаційної системи через її фізичні передумови. Здобувач освіти має не лише отримати спектрограму, а й пов'язати характеристики електромагнітного середовища з конкретними метриками надійності передавання даних. Як технічні засоби навчання використовуються: (а) SDR як інструмент спостереження спектра й активності в діапазоні; (б) прості радіомодулі або вузли мережі (IEEE 802.15.4, інші навчальні модулі) як джерело пакетних логів; (в) програмні інструменти для збору й аналізу даних (GNU Radio або еквівалент, скрипти аналізу). Освітня доцільність SDR у цьому форматі обґрунтовується працями, де SDR розглядаються як платформа для навчальних сценаріїв із акцентом на практичний вимір теорії зв'язку (Ramos et al., 2024).

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Поняття завод набуває змісту тоді, коли здобувач освіти бачить, що “завада” — це не абстрактний шум, а конкретний стан електромагнітного середовища, який можна описати вимірюваними ознаками і пов'язати з поведінкою каналу зв'язку. Технічні засоби навчання на кшталт SDR є зручними саме тому, що дають оперативне спостереження за спектром та активністю діапазону, а отже, дозволяють будувати причинні пояснення на межі “сигнал–канал–дані”. SDR-лабораторії підтримують перехід від теорії до експерименту, але вимагають чітко заданої методики, інакше спостереження перетворюється на “картинку” без інженерного висновку. (Ramos et al., 2024).

Перший клас практик — спектральний опис. Він включає: оцінювання спектральної щільності потужності (PSD), побудову спектрограм (час–частота), спостереження домінуючих джерел у смузі каналу, фіксацію перекриття каналів і появу широкопasmових або вузькопasmових компонентів. Для навчання важливий не сам спектр, а те, що через нього здобувач освіти починає розрізняти: (а) “фон” (підвищення шумового фону), (б) “домінуюче джерело” (пік/смуга, що перебиває канал), (в) “перемикання” активності між каналами. Окрему дидактичну цінність мають завдання, де здобувач освіти змінює частоту/канал передавання даних і бачить, як це змінює спектральну ситуацію, а далі — метрики надійності. Така логіка добре узгоджується з ідеєю регуляторного “спільного використання спектра” для обладнання 2.4 GHz ISM, відображеною в ETSI EN 300 328 (вимоги доступу до спектра/співіснування) (European Telecommunications Standards Institute, 2019).

Другий клас — зайнятість каналу (channel occupancy) та пов'язані з нею методи енергетичного детектування (визначення). З педагогічного погляду це місток між фізикою і протоколами доступу до середовища. Здобувач освіти бачить, що навіть без “високого шуму” канал може бути “поганим” через домінування чужих передавань у часі. Тут доцільно вводити поняття порога та часових вікон усереднення: різні параметри детектування дають різні оцінки усереднення, а отже, потребують фіксації процедури. Практика усереднення особливо корисна у сценаріях коекзистенції Wi-Fi та IEEE 802.15.4, де деградація якості часто пояснюється не лише енергетикою перешкоди, а й тим, що “ефір зайнятий” і пристрої відступають у backoff/повтори (Shin et al., 2007a).

Третій клас — часова структура завод. У реальному ISM-середовищі домінують переривчасті джерела: “пакетні” спалахи Wi-Fi, hopping-поведінка Bluetooth, короткі, але інтенсивні впливи від локальних джерел. Для здобувачів освіти методично важливо показати різницю між стабільним підвищенням фону і короткими сплесками. Переривчасті завади дозволяють пояснити, чому середні спектральні показники не завжди корелюють із відчутними провалами надійності. Тут доречно згадати, що процедура і характеристики апаратури впливають на те, що саме ми “бачимо” (International Electrotechnical Commission, 2019).

Четвертий клас — просторові практики. Вони найбільш інтуїтивні для аудиторних лабораторій: зміна відстані, поворот антен, введення екранування, розміщення джерела завод поруч із приймачем або передавачем. У межах курсу це природний спосіб показати, що надійність передавання даних є функцією геометрії, багатопроменовості та співрозташування пристроїв, а не лише налаштувань протоколу. У літературі про взаємні завади IEEE 802.15.4 і IEEE 802.11b підкреслюється, що просторовий чинник є системотвірним (Shin et al., 2007a).

П'ятий клас — процедурні практики, які доречно подати як основу “вимірювальної добросовісності”. Йдеться про фіксацію параметрів SDR (центральна частота, смуга, частота дискретизації, FFT-параметри, пороги), контроль перевантаження вхідного тракту, узгодження антени, стабільність умов і документування. Цей клас практик і формує відмінність між “демонстрацією SDR” і лабораторією з вимірюваними висновками. Тут корисно спиратися на CISPR 16-1-1 як на базовий EMC-стандарт, що визначає характеристики апаратури вимірювання радіозавод: навіть якщо навчальна лабораторія не відтворює стандартні процедури, вона повинна наслідувати їхню логіку — контроль похибок, сталість параметрів, відтворюваність результатів (International Electrotechnical Commission, 2019).

Надалі перейдемо до опису таксономії практик оцінювання надійності передавання даних за наявності завад через метрики помилок/втрат і метрики сервісу (пропускна здатність, час, стабільність).

BER (bit error rate) — базова метрика фізичного рівня, а PER (packet error rate) — її “прикладне” відображення для передачі кадрів/пакетів. У навчанні відображення PER часто дидактично продуктивніші, бо прямо відповідають на випадок “пакет не дійшов”. Важливо показати, що PER може бути отриманий із BER лише за певних припущень (довжина пакета, незалежність помилок, кодування), і саме тут фізичні основи IC виходять на рівень моделей. Класичні роботи з аналізу PER IEEE 802.15.4 підтверджують ланцюг: інтерференція → SINR → BER → PER плюс часові колізії (Shin et al., 2007b).

PRR (packet reception ratio) зручна в лабораторіях із простими радіомодулями й сенсорними вузлами: її легко обчислювати, легко порівнювати між умовами, і вона прямо показує “скільки прийнято” даних. Педагогічно корисно поєднувати PRR з оцінкою зайнятості каналу: здобувач освіти бачить, що близькість каналів у частоті та високий фон активності знижують PRR навіть тоді, коли спектральна картина не виглядає катастрофічною. Дослідження взаємних завад IEEE 802.15.4 і IEEE 802.11b показують деградацію продуктивності при колокації; це узгоджується з тим, що PRR реагує не лише на силу завади, а й на механізми доступу до ефіру й часову структуру інтерференції (Shin et al., 2007a).

Пропускна здатність (throughput) описує загальну інтенсивність передавання, а goodput — корисно доставлені дані без службових накладних і повторів. Ці метрики потрібні, щоб пояснити парадокс: інколи PER/PRR змінюються помірно, але goodput падає суттєво через повторні передавання, backoff і конкуренцію за середовище. Це природно пов’язується з вимогами співіснування у спільному спектрі, які фіксуються в ETSI EN 300 328: на практиці інформаційні системи мають не лише “передавати”, а й “ділити” спектр (European Telecommunications Standards Institute, 2019).

У багатьох застосуваннях важливим стає не середній рівень втрат, а затримка (latency) та її варіативність (jitter або нерівномірність затримки передавання даних). Здобувач освіти бачить, що інтерференція впливає не тільки на “успішну/неуспішну” доставку, а й на час доставки через повтори, адаптивні механізми, очікування ефіру. Особливо демонстративними є сценарії завад, де варіативність зростає через поодинокі сплески, які спричиняють “хвости” розподілу часу доставки.

Outages (розриви/провали зв’язку) — метрика, яка дозволяє відрізнити “погану середню якість” від “нестабільності”, коли система то працює, то раптово перестає працювати. У літературі підкреслюється роль зайнятості каналу та відтворюваності протоколів тестування, щоб визначити пороги зайнятості (LaSorte et al., 2012).

Таксономія практик EM3 і таксономія метрик надійності поєднані нами у матриці відповідності (Табл. 1), яка задає правила проектування лабораторних робіт.

Таблиця 1. Відповідність практик визначення/опису електромагнітних завад і метрик надійності передавання даних (SDR і прості радіомодулі)*

Метрика надійності \ Практика EMI	A	B	C	D	E
1) BER/ PER	Зіставити енергію в смузі каналу з ростом PER при перекритті каналів/ потужності інтерферера. Дає прямий місток “фізика сигналу - пакетні втрати”.	Показати зростання PER у вікнах високої зайнятості навіть без різкої зміни середнього спектра.	PER чутливий до коротких сильних сплесків більше, ніж до стабільного фону; демонструє роль “рідкісних подій”.	Невеликі зміни відстані/ орієнтації антен змінюють PER; видно роль багато-променевості та колокації пристроїв.	PER легко спотворюється перевантаженням SDR або різними порогами/FFT; потрібна фіксація налаштувань і контроль насиченості (логіка вимог до вимірювань як орієнтир).
2) PRR	PRR корелює з інтегральною енергією в смузі приймача (SDR як “спостерігач”); зручно для сенсорних модулів.	Визначити пороги зайнятості, за яких PRR переходить у нестабільний режим, підводить до ідеї співіснування	“Зубці” PRR у часі пояснюють burst-джерела (Wi-Fi-спалахи, стрибки тощо).	PRR різко реагує на колокацію, екранування, «тінь». Показує, що фізичний рівень може домінувати над протоколом.	Порівняння PRR коректне лише за єдиного протоколу логування (пакети/ інтервали/ режими повторів).
3) Throughput/ Goodput	Зі зростанням спектральної інтенсивності пропускна здатність падає нелінійно через повтори та відступи	Висока зайнятість знижує корисний трафік навіть при помірному PER (очікування доступу до ефіру), що збігається з логікою співіснування в ISM.	Спалахові завади породжують короткі провали пропускної здатності і лавинні повтори, що знижують корисний трафік.	Просторове рознесення/ орієнтація іноді піднімає корисний трафік без зміни протоколу, демонструючи “фізичний ресурс” для оптимізації IC.	Потрібні однакові інтервали вимірювання і синхронізація часу; SDR-спостереження має бути прив’язане до пакетних логів.
4) Latency/ Jitter	Інтерференція збільшує затримки через повтори/ адаптації; зручно формулюється як ланцюг “фізика → протокол → час”.	Навіть без росту PER, зайнятість збільшує латентність через очікування доступу до каналу.	Спалахи різко збільшують варіативність (викиди), що важливо для розуміння нестабільності сервісу.	Варіативність може різко змінюватися від розташування через RSSI/ багато-променевість	Часові мітки та стабільність вимірювань; без артефактів відтворюваності висновки про варіативність ненадійні.

Метрика надійності \ Практика ЕМІ	А	В	С	Д	Е
5) Часова стабільність (outages)	Перебої в роботі часто видно як періоди домінування сильного джерела в спектрограмі.	Зайнятість працює як простий предиктор: за яких значень зайнятості виникають розриви.	Найтиповіша причина перебоїв – короткі, але дуже сильні події.	Близькість до інтерферера або екранування породжує повторювані провали; це легко відтворюється в аудиторії технічними засобами навчання.	Важливо відокремлювати реальні перебої від артефактів (перевантаження, пороги детекції, несталі налаштування).

*Пояснення до стовпців (практики ЕМЗ): А – спектральна інтенсивність (PSD/ спектрограма); В – зайнятість каналу (channel occupancy); С – імпульсність/переривчастість (bursty); D – просторові чинники (відстань/орієнтація/екранування); Е – процедурні чинники вимірювання (параметри FFT, пороги, перевантаження приймача, фіксація налаштувань; межі SDR як навчального інструмента). SDR розглядається як навчальний засіб спостереження, а не сертифікаційний вимірювальний приймач; вимоги стандартів використано як орієнтир валідності процедури.

Джерело: авторська розробка (структура і звітність організовані за Arksey & O'Malley (2005) і PRISMA-ScR (Tricco et al., 2018)).

Наведена матриця відповідності вводиться як інструмент проектування лабораторної роботи, у якій технічні засоби навчання (SDR і прості радіомодулі) допомагають перейти від опису електромагнітного середовища до пояснення поведінки інформаційної системи. Одна й та сама спектральна картина може призводити до різних наслідків для PER, PRR, пропускної здатності або затримки залежно від часової структури інтерференції, доступу до ефіру та розташування пристроїв. Матриця задає “мову узгодження”: (а) який саме прояв завад ми фіксуємо (спектр, зайнятість, спалах-події, простір, процедура), (б) яку метрику надійності обираємо як навчальну ціль, (в) який причинний механізм очікуємо і як його перевіряємо.

Педагогічна цінність матриці полягає в тому, що: здобувач освіти отримує спектрограму, але висновок формулює не на рівні загальних фраз (“завади погіршують зв’язок”), матриця примушує конкретизувати: “який тип завад”, “яка метрика”, “яка процедура вимірювання”, “який зв’язок між ними”. Рамка впровадження задає єдиний сценарій, у якому технічні засоби навчання не “ілюструють” тему, а підтримують формування пояснення у ланцюжку: електромагнітні завади – параметри сигналу/доступу до ефіру – метрики надійності.

ОБГОВОРЕННЯ

Запропонована матриця відповідності та рамка впровадження закривають наявний методичний розрив: у навчальній практиці спостерігається тенденція зводити роботу з SDR до демонстрації спектра, тоді як для інформаційних систем принциповим є інше: як зміни в електромагнітному середовищі породжують зміну метрик надійності передавання даних, що описують сервіс уже на рівні системи. Матриця пропонує формалізований “місток” між цими рівнями. Вона дозволяє проектувати лабораторну роботу так, щоб спостереження ЕМЗ було пов’язане з конкретною метрикою надійності (PER/PRR/throughput/latency/outages) і мало передбачуваний механізм, а не інтуїтивний коментар.

Запропонована структура змінює статус технічних засобів навчання. SDR, радіомодулі та програмні інструменти (GNU Radio або аналоги) перестають бути “ілюстраторами” явищ. Вони стають засобами організації доказів: здобувач освіти спостерігає спектральну картину, описує зайнятість каналу та часову структуру інтерференції, а потім зіставляє це з логами пакетів і отриманими метриками. Таке поєднання підтримує інженерний тип мислення, що добре узгоджується з підходом “зайнятість - пропускна здатність/затримка” у навчанні (European Telecommunications Standards Institute, 2019). Окрему методичну роль відіграє процедурний вимір вимірювань, який узгоджується з логікою базових EMC-стандартів, де характеристики апаратури й вимірювальна процедура визначають валідність тверджень про радіозавади (International Electrotechnical Commission, 2019).

ОБМЕЖЕННЯ

Обмеження цієї роботи впливають насамперед із її типу та з природи обраних технічних засобів навчання. По-перше, огляд має формат scoring review і не передбачає метааналізу або кількісного узагальнення ефектів, тому запропонована матриця та рамка не є “доведено ефективною методикою” в статистичному сенсі. Вони є концептуальною систематизацією практик, описаних у літературі, та пропозицією їхнього педагогічного упорядкування відповідно до методології scoring review (Arksey, & O'Malley, 2005).

По-друге, у статті SDR навмисно трактується як засіб навчального спостереження, а не як стандартизований вимірювальний приймач для оцінювання електромагнітних завад. Це означає, що результати лабораторних спостережень не можуть інтерпретуватися як відповідність/невідповідність виробів EMC-нормам і не мають переноситися на задачі сертифікаційного контролю. Водночас використання CISPR 16-1-1 як орієнтир вимірювальної культури здобувачів освіти не усуває обмежень, пов’язаних із калібруванням, динамічним діапазоном, антенною системою та ризиком перевантаження приймача, які в навчальних умовах інколи важко контролювати повністю (International Electrotechnical Commission, 2019).

По-третє, сфокусованість на 2.4 GHz ISM-діапазоні має двоїстий характер. З одного боку, це найтиповіший простір для освітніх лабораторій і тому педагогічно виправданий. З іншого боку, не всі висновки щодо механізмів зайнятості каналу, доступу до ефіру та типових джерел інтерференції можуть бути однаково перенесені на інші діапазони або на спеціалізовані промислові радіосистеми. Нормативні вимоги ETSI EN 300 328 відображають саме клас широкополосних

систем у 2.4 GHz і не повинні механічно екстраполюватися на інші регуляторні режими (European Telecommunications Standards Institute, 2019).

По-четверте, запропонована рамка задає мінімальний пакет результатів відтворюваності, проте не гарантує однакової якості реалізації у різних навчальних середовищах. На практиці на результати впливають фонові джерела випромінювання, просторові особливості аудиторій, різний рівень підготовленості здобувачів освіти та відмінності у програмних реалізаціях збору логів. Це обмеження слід враховувати під час перенесення рамки між закладами освіти і під час інтерпретації навчальних результатів, навіть якщо процедура може бути формально відтворена.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Центральним результатом дослідження стала матриця відповідності «практика ЕМЗ – метрика надійності», яка задає рамку проектування лабораторних робіт і зменшує ризик підміни інженерного висновку демонстрацією спектрограм. Запропонована рамка впровадження визначає послідовність дій і мінімальний пакет артефактів відтворюваності (конфігурації SDR, опис середовища, сирі логи, спосіб обчислення метрик і короткий журнал рішень), що робить результат навчання таким, що можна перевірити. Перспективи подальших досліджень у навчальних експериментах із SDR пов'язані насамперед з емпіричною валідацією запропонованої матриці відповідності та рамки впровадження. Доцільно перевірити, чи підвищує така структуризація здатність здобувачів освіти будувати причинні пояснення “характеристика завод – зміна метрики надійності”, а також чи зменшує частку декларативних висновків у звітах здобувачів за результатом виконання робіт. Подальші розвідки можуть бути спрямовані на адаптацію матриці до змішаного і дистанційного форматів навчання; важливим є розширення предметного поля за межі одного діапазону та одного класу пристроїв: порівняння навчальних ефектів і типових помилок інтерпретації для різних технологій (наприклад, Wi-Fi, Bluetooth) і різних умов середовища дозволить уточнити універсальні та специфічні елементи запропонованої матриці й рамки.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори підтверджують відсутність фінансових, особистих чи інших інтересів, що можуть розглядатися як потенційний конфлікт інтересів щодо публікації цієї статті.

ДЖЕРЕЛА ФІНАНСУВАННЯ

Робота виконана за відсутності фінансової підтримки з боку будь-яких організацій.

ДОСТУПНІСТЬ ДАНИХ

Це теоретичне дослідження не передбачає використання додаткових наборів даних.

ВИКОРИСТАННЯ ЗАСОБІВ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Інструменти штучного інтелекту використовувалися при пошуку наукових джерел (Perplexity), перекладі анотацій (ChatGPT) та граматичній корекції тексту роботи (Grammarly). Усі результати критично переглянуті, перевірені та відредаговані авторами. Авторі несуть повну відповідальність за зміст публікації.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Arksey, H., & O'Malley, L. (2005). Scoping studies: Towards a methodological framework. *International Journal of Social Research Methodology*, 8(1), 19–32. <https://doi.org/10.1080/1364557032000119616>
2. European Telecommunications Standards Institute. (2019). *ETSI EN 300 328 V2.2.2 (2019-07): Wideband transmission systems; Data transmission equipment operating in the 2.4 GHz band; Harmonised Standard for access to radio spectrum*. ETSI. URL: https://www.etsi.org/deliver/etsi_en/300300_300399/300328/02.02.02_60/en_300328v020202p.pdf
3. International Electrotechnical Commission. (2019). *CISPR 16-1-1:2019: Specification for radio disturbance and immunity measuring apparatus and methods – Part 1-1: Radio disturbance and immunity measuring apparatus – Measuring apparatus*. IEC. URL: <https://webstore.iec.ch/en/publication/60774>
4. LaSorte, N. J., Rajab, S. A., & Refai, H. H. (2012). Experimental assessment of wireless coexistence for 802.15.4 in the presence of 802.11g/n. *2012 IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility*, 473–479. <https://doi.org/10.1109/ISEMC.2012.6351685>
5. Ramos, M. A., Camacho, R., Buitrago, P. A., Urda, R. D., & Restrepo, J. P. (2024). Software Defined Radio, a perspective from education. *Frontiers in Education*, 8, Article 1228610. <https://doi.org/10.3389/educ.2023.1228610>
6. Shin, S. Y., Park, H. S., & Kwon, W.-H. (2007a). Mutual interference analysis of IEEE 802.15.4 and IEEE 802.11b. *Computer Networks*, 51(12), 3338–3353. <https://doi.org/10.1016/j.comnet.2007.01.034>
7. Shin, S. Y., Park, H. S., & Kwon, W.-H. (2007b). Packet error rate analysis of IEEE 802.15.4 under saturated IEEE 802.11b network interference. *IEICE Transactions on Communications*, E90-B(10), 2961–2963. <https://doi.org/10.1093/ietcom/e90-b.10.2961>
8. Tricco, A. C., Lillie, E., Zarin, W., O'Brien, K. K., Colquhoun, H., Levac, D., Moher, D., Peters, M. D. J., Horsley, T., Weeks, L., Hempel, S., Akl, E. A., Chang, C., McGowan, J., Stewart, L., Hartling, L., Aldcroft, A., Wilson, M. G., Garritty, C., ... Straus, S. E. (2018). PRISMA Extension for Scoping Reviews (PRISMA-ScR): Checklist and explanation. *Annals of Internal Medicine*, 169(7), 467–473. <https://doi.org/10.7326/M18-0850>
9. Yurchenko, A., Proshkin, V., Naboka, O., Shamonina, V., & Semenikhina, O. (2023). The use of digital technologies in education: The case of physics learning. *International Journal of Research in E-learning*, 9(2), 1–25. <https://doi.org/10.31261/IJREL.2023.9.2.02>
10. Дементьев, Е.,А., & Юрченко, А.О. (2025). Використання відкритих освітніх платформ для формування інженерного мислення у курсах мікроелектроніки. *Освіта. Інноватика. Практика*, 13(6), 98–103. <https://doi.org/10.31110/2616-650X-vol13i6-013>
11. Семеніхіна, О.В., Шамо́ня, В.Г., & Сорока, М.П. (2025). Інтеграція STEM-підходу в навчання мікроелектроніки майбутніх учителів інформатики. *Наука і техніка сьогодні*, 8(49), 948–959. [https://doi.org/10.52058/2786-6025-2025-8\(49\)-948-959](https://doi.org/10.52058/2786-6025-2025-8(49)-948-959)

12. Шамо́ня, В.Г., Де́мєнтьєв, Є.,А., & Семеніхі́на, О.В. (2025а). Наочне моделювання цифрових компонентів комп'ютерної архітектури при вивченні мікроелектроніки. *Вісник науки та освіти*, 7(37), 1869–1878. [https://doi.org/10.52058/2786-6165-2025-7\(37\)-1869-1878](https://doi.org/10.52058/2786-6165-2025-7(37)-1869-1878)
13. Шамо́ня, В.Г., Момот, Р.А., & Семеніхі́на, О.В. (2025b). Візуальні методи навчання основ мікроелектроніки і архітектури комп'ютера: використання віртуального середовища Proteus. *Вісник Луганського національного університету імені Тараса Шевченка. Педагогічні науки*, (3), 90–96. <https://doi.org/10.12958/3083-6514-2025-3-90-96>

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Arksey, H., & O'Malley, L. (2005). Scoping studies: Towards a methodological framework. *International Journal of Social Research Methodology*, 8(1), 19–32. <https://doi.org/10.1080/1364557032000119616>
2. European Telecommunications Standards Institute. (2019). *ETSI EN 300 328 V2.2.2 (2019-07): Wideband transmission systems; Data transmission equipment operating in the 2.4 GHz band; Harmonised Standard for access to radio spectrum*. ETSI. URL: https://www.etsi.org/deliver/etsi_en/300300/300399/300328/02_02_02_60/en_300328v020202p.pdf
3. International Electrotechnical Commission. (2019). *CISPR 16-1-1:2019: Specification for radio disturbance and immunity measuring apparatus and methods – Part 1-1: Radio disturbance and immunity measuring apparatus – Measuring apparatus*. IEC. URL: <https://webstore.iec.ch/en/publication/60774>
4. LaSorte, N. J., Rajab, S. A., & Refai, H. H. (2012). Experimental assessment of wireless coexistence for 802.15.4 in the presence of 802.11g/n. *2012 IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility*, 473–479. <https://doi.org/10.1109/ISEMC.2012.6351685>
5. Ramos, M. A., Camacho, R., Buitrago, P. A., Urda, R. D., & Restrepo, J. P. (2024). Software Defined Radio, a perspective from education. *Frontiers in Education*, 8, Article 1228610. <https://doi.org/10.3389/feduc.2023.1228610>
6. Shin, S. Y., Park, H. S., & Kwon, W.-H. (2007a). Mutual interference analysis of IEEE 802.15.4 and IEEE 802.11b. *Computer Networks*, 51(12), 3338–3353. <https://doi.org/10.1016/j.comnet.2007.01.034>
7. Shin, S. Y., Park, H. S., & Kwon, W.-H. (2007b). Packet error rate analysis of IEEE 802.15.4 under saturated IEEE 802.11b network interference. *IEICE Transactions on Communications*, E90-B(10), 2961–2963. <https://doi.org/10.1093/ietcom/e90-b.10.2961>
8. Tricco, A. C., Lillie, E., Zarin, W., O'Brien, K. K., Colquhoun, H., Levac, D., Moher, D., Peters, M. D. J., Horsley, T., Weeks, L., Hempel, S., Akl, E. A., Chang, C., McGowan, J., Stewart, L., Hartling, L., Aldcroft, A., Wilson, M. G., Garrity, C., ... Straus, S. E. (2018). PRISMA Extension for Scoping Reviews (PRISMA-ScR): Checklist and explanation. *Annals of Internal Medicine*, 169(7), 467–473. <https://doi.org/10.7326/M18-0850>
9. Yurchenko, A., Proshkin, V., Naboka, O., Shamonina, V., & Semenikhina, O. (2023). The use of digital technologies in education: The case of physics learning. *International Journal of Research in E-learning*, 9(2), 1–25. <https://doi.org/10.31261/IJREL.2023.9.2.02>
10. Diemientiev, Ye., & Yurchenko, A. (2025). Vykorystannia vidkrytykh osvitynykh platform dlia formuvannia inzhenernoho myslennia u kursakh mikroelektroniky [Using open educational platforms to develop engineering thinking in microelectronics courses]. *Osvita. Innovatyka. Praktyka – Education. Innovation. Practice*, 13(6), 98–103. <https://doi.org/10.31110/2616-650X-vol13i6-013> (in Ukrainian).
11. Semenikhina, O.V., Shamonina, V.H., & Soroka, M.P. (2025). Intehratsiia STEM-pidkholu v navchannia mikroelektroniky maibutnykh uchyteliv informatyky [Integration of the STEM approach into microelectronics education for future computer science teachers]. *Nauka i tekhnika siodni – Science and technology today*, 8(49), 948–959. [https://doi.org/10.52058/2786-6025-2025-8\(49\)-948-959](https://doi.org/10.52058/2786-6025-2025-8(49)-948-959) (in Ukrainian).
12. Shamonina, V.H., Diemientiev, Ye.,A., & Semenikhina, O.V. (2025a). Naочне моделювання tsyfrovyykh komponentiv komp'uternoї arkhitektury pry vyvchenni mikroelektroniky [Visual modelling of digital components of computer architecture in the study of microelectronics]. *Visnyk nauky ta osvity – Bulletin of Science and Education*, 7(37), 1869–1878. [https://doi.org/10.52058/2786-6165-2025-7\(37\)-1869-1878](https://doi.org/10.52058/2786-6165-2025-7(37)-1869-1878) (in Ukrainian).
13. Shamonina, V.H., Momot, R.A., & Semenikhina, O.V. (2025b). Vizualni metody navchannia osnov mikroelektroniky i arkhitektury komp'utera: vykorystannia virtualnoho seredovyscha Proteus [Visual methods for teaching the fundamentals of microelectronics and computer architecture: using the virtual environment proteus]. *Visnyk Luhanskoho natsionalnoho universytetu imeni Tarasa Shevchenka. Pedagogichni nauky – Bulletin of the Taras Shevchenko National University of Luhansk. Pedagogical Sciences*, (3), 90–96. <https://doi.org/10.12958/3083-6514-2025-3-90-96> (in Ukrainian).

| Матеріал надійшов до редакції: 15.01.2026 р. | Прийнято до друку: 22.02.2026 р. | Опубліковано: 30.04.2026 р. |



This work is licensed under Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.

АЛФАВІТНИЙ ПОКАЖЧИК

	Б	Луцин С.	28
Базурін В.		М	
Базуріна С.		Морачковська І.	56
Беспалий В.		Н	
Боднарук С.		Носенко Ю.	64
	В	П	
Вороніна М.		Правіцка Н.	71
Воронкін О.		Працьовитий М.	71
	Г	Р	
Гладушина Р.		Ратушняк С.	71
	Д	Рибчинський Н.	18
Деордіца Т.		Т	
Дуленко Н.		Толмачов В.	46
	Є	Ч	
Епіфанова О.		Чкана Я.	86
	К	Ш	
Козьменко О.		Шамоня В.	94
Колесник В.			
Колесник С.			
	Л		
Лінник Г.			

Наукове видання

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА

Науковий журнал

Key title: Fiziko-matematična osvita

Abbreviated key title: Fiz.-mat. osv.

Том 41, № 2

2026

Друкується в авторській редакції
Матеріали подані мовою оригіналу

Відповідальний за випуск

О.В. Семеніхіна

Комп'ютерна верстка

О.М. Удовиченко

Ідентифікатор медіа:

R30-02975

<https://fmo-journal.org/>

Підп. до друку 27.04.2026.

Формат 60x84/8. Гарнітура Calibri. Папір офсетний. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 12,8.

Ум. фарб.-відб. 12,8. Обл.-вид. арк. 11,6. Тираж 50 пр. Вид. №14

Видавець:

Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка

40002, м.Суми, вул.Роменська, 87

Тел. (0542) 68-59-15, (0542) 68-59-72; rector@sspu.edu.ua

Свідоцтво ДК № 231 від 02.11.2000 р.

Виготовлювач:

ФОП Цьома С.П. 40002, м. Суми, вул. Роменська, 100.

Тел.: 066-293-34-29.

Зам. № 13

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:

серія ДК, № 5050 від 23.02.2016.