

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка
Фізико-математичний факультет

ISSN 2413-1571 (print)
ISSN 2413-158X (online)

ФІЗИКО- МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА

Науковий журнал

Том 40, № 5

Суми – 2025

**Рекомендовано до видання вченою радою
Сумського державного педагогічного університету імені А.С. Макаренка
(протокол № 4 від 24.11.2025 р.)**

Редакційна колегія

Олена Семеніхіна (головний редактор)	доктор педагогічних наук, професор, Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка, Україна
Марина Друшляк (заступник головного редактора)	доктор педагогічних наук, професор, Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка, Україна
Francis Kwadwo Awuah	доктор філософії з математичної освіти, викладач кафедри педагогічної освіти, Науково-технологічний університет імені Кваме Нкруми, Гана
Michail Kalogiannakis	доктор філософії, професор, Університет Фессалії, Греція
Jacob Owusu Sarfo	доктор філософії з промоції здоров'я (охорона здоров'я, фізичне виховання та рекреація), старший викладач, Університет Кейп-Кост, Гана
Igor Subbotin	доктор фізико-математичних наук, професор, Кафедра математики і природничих наук, Національний університет, США
Michael Voskoglou	доктор філософії, почесний професор математичних наук, Вищий технологічний освітній інститут Західної Греції, Греція
Олена Гречановська	доктор педагогічних наук, професор, Вінницький Національний Технічний Університет, Україна
Тетяна Лукашова	доктор фізико-математичних наук, професор, Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка, Україна
Василь Швець	кандидат педагогічних наук, професор, Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Україна
Олександр Школьний	доктор педагогічних наук, професор, Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Україна
Артем Юрченко	кандидат педагогічних наук, доцент, Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка, Україна

Ф45 Фізико-математична освіта : науковий журнал. Том 40, № 5. Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Фізико-математичний факультет ; редкол.: О.В. Семеніхіна (гол.ред.) [та ін.]. Суми : [СумДПУ ім. А.С. Макаренка], 2025. 90 с.

*Наказом МОН України №1412 від 18.12.2018 р. журнал «Фізико-математична освіта» затверджено як **фахове наукове видання категорії «Б»** у галузі педагогічних наук (13.00.02 – математика, фізика, інформатика; 13.00.10) і за спеціальностями 011, 014, 015.*

Журнал індексується наукометричною базою **Index Copernicus Journals Master List**

Автори статей несуть відповідальність за достовірність наведеної інформації (точність наведених у статті даних, цитат, статистичних матеріалів тощо) та за порушення прав інтелектуальної власності інших осіб.

Висловлені авторами думки можуть не співпадати з точкою зору редакції.

**УДК 53+51]:37(051)
DOI: 10.31110/2413-1571**

© СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2025

**MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE
Makarenko Sumy State Pedagogical University
Physics and Mathematics Faculty**

**ISSN 2413-1571 (print)
ISSN 2413-158X (online)**

PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION

Scientific Journal

Vol. 40, No. 5

Sumy – 2025

**Recommended for publication by the Academic Council
of Makarenko Sumy State Pedagogical University
(Protocol No 4 from 24.11.2025)**

Editorial Board

Olena Semenikhina (editor-in-chief)	Dr. of Pedagogical Sciences, Professor, Sumy State Pedagogical University named after A.S.Makarenko, Ukraine
Maryna Drushlyak (co-editor-in-chief)	Dr. of Pedagogical Sciences, Professor, Sumy State Pedagogical University named after A.S.Makarenko, Ukraine
Francis Kwadwo Awuah	PhD in Mathematics Education, Lecturer at the Department of teacher education, Kwame Nkrumah University of Science & Technology, Ghana
Michail Kalogiannakis	PhD., Professor, University of Thessaly, Greece
Jacob Owusu Sarfo	PhD Health Promotion (Health, Physical Education and Recreation), Senior Lecturer, University of Cape Coast, Ghana
Igor Subbotin	Dr. of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Mathematics and Natural Sciences, National University, Los Angeles, USA
Michael Voskoglou	Ph.D., Professor, Graduate Technological Educational Institute (TEI) of Western Greece, Patras, Greece
Olena Hrechanovska	Dr. of Pedagogical Sciences, Professor, Vinnytsia National Technical University, Ukraine
Tetyana Lukashova	Dr. of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Sumy State Pedagogical University named after A.S.Makarenko, Ukraine
Vasyl Shvets	PhD (pedagogical sciences), Professor, Dragomanov Ukrainian State University, Ukraine
Oleksandr Shkolnyi	Dr. of Pedagogical Sciences, Professor, Dragomanov Ukrainian State University, Ukraine
Artem Yurchenko	PhD (pedagogical sciences), Associate Professor, Sumy State Pedagogical University named after A.S.Makarenko, Ukraine

F 45 Physical and Mathematical Education : Scientific Journal. Vol. 40, No. 5. Makarenko Sumy State Pedagogical University, Physics and Mathematics Faculty ; O.V. Semenikhina (chief editor). Sumy : [Makarenko Sumy State Pedagogical University], 2025. 90 p.

The authors of the articles are responsible for the authenticity of the information (the accuracy of the presented information in the article, quotations, statistical materials, etc.) and for the violation of the intellectual property rights of others.

Opinions expressed by the authors may not reflect the views of the editors.

**UDC 53+51]:37(051)
DOI: 10.31110/2413-1571**

© Makarenko Sumy State Pedagogical University, 2025

ЗМІСТ

Аду А., Апаву Дж., Обенг-Денте В. 6 ВИКОРИСТАННЯ МАНІПУЛЯТИВІВ У МАТЕМАТИЧНИХ КЛАСАХ ІНКЛЮЗИВНИХ БАЗОВИХ ШКІЛ У ГАНІ 6	6
Босін М., Рикова Л., Брославська Г. 14 ОСОБЛИВОСТІ ТЕСТІВ І ТЕСТОВОГО КОНТРОЛЮ НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ З ФІЗИКИ 14	14
Бохонов Ю. 21 ВИКОРИСТАННЯ МАТРИЧНОГО ЧИСЛЕННЯ В ЗАДАЧАХ ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИРАЗІВ З ПОХІДНИМИ БАГАТОВИМІРНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ 21	21
Глушак О., Семеняка С., Зінченко Н. 29 ОПТИМІЗАЦІЯ ВІДБОРУ ФАКТОРНИХ ЗМІННИХ У ПРОЦЕСІ ЕКОНОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ: ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ..... 29	29
Грицик Т. 36 ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ ЕКОНОМІЧНОГО ЗМІСТУ 36	36
Литвинова С., Носенко Ю., Осадча К., Пінчук О., Рашевська Н., Сухих А. 44 КОНЦЕПТУАЛЬНА МОДЕЛЬ ІНТЕГРАЦІЇ ГЕНЕРАТИВНОГО ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ У ПРОЦЕС РОЗВИТКУ ІНФОРМАЦІЙНО-ЦИФРОВОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ УЧНІВ РІВНЯ БАЗОВОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ 44	44
Павлова Н., Дубич К. 53 ДИСТАНЦІЙНИЙ ПРАКТИКО-ОРІЄНТОВАНИЙ КУРС «3D-ГРАФІКА»: ВИКЛИКИ І ПЕРСПЕКТИВИ ВПРОВАДЖЕННЯ 53	53
Слободяник О. 61 ДОПОВНЕНА РЕАЛЬНІСТЬ НА УРОКАХ ФІЗИКИ: ДОСВІД ВИКОРИСТАННЯ PHYSICS LAB AR ЗА УМОВ ЗМІШАНОГО НАВЧАННЯ 61	61
Ткач О. 68 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З МАТЕМАТИКИ УЧНЯМИ СТАРШОЇ ШКОЛИ ЯК ЕФЕКТИВНИЙ ЗАСІБ ФОРМУВАННЯ КОМПЕТЕНТНОСТІ «ПІДПРИЄМЛИВІСТЬ ТА ФІНАНСОВА ГРАМОТНІСТЬ»..... 68	68
Школьний О. 74 МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ОСНОВ ФІНАНСОВОЇ ГРАМОТНОСТІ В КУРСІ МАТЕМАТИКИ 8 КЛАСУ НУШ 74	74
Юрченко А., Момот Р., Острога М., Семеніхіна О. 80 ВІЗУАЛІЗАЦІЯ ЗНАТЬ ЗАСОБАМИ ВЕБТЕХНОЛОГІЙ У ФОРМУВАННІ КРИТИЧНОГО МИСЛЕННЯ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ ІНФОРМАТИКИ 80	80
АЛФАВІТНИЙ ПОКАЖЧИК..... 89	89

CONTENTS

Adu A., Apawu J., Obeng-Denteh W. 6 MANIPULATIVES USE IN MATHEMATICS CLASSROOMS OF INCLUSIVE BASIC SCHOOLS IN GHANA 6	6
Bosin M., Rykova L., Broslavska H. 14 FEATURES OF TESTS AND TEST CONTROL OF ACADEMIC ACHIEVEMENTS IN PHYSICS 14	14
Bokhonov Yu. 21 USING MATRIX CALCULUS IN PROBLEMS OF TRANSFORMING EXPRESSIONS WITH DERIVATIVES OF MULTIDIMENSIONAL MAPPINGS 21	21
Hlushak O., Semeniaka S., Zinchenko N. 29 OPTIMIZATION OF THE SELECTION OF FACTOR VARIABLES IN THE PROCESS OF ECONOMETRIC MODELING: PRACTICAL RECOMMENDATIONS 29	29
Hrytsik T. 36 CONSTRUCTION OF MATHEMATICAL MODELS WHEN SOLVING APPLIED PROBLEMS OF ECONOMIC CONTENT 36	36
Lytvynova S., Nosenko Yu., Osadcha K., Pinchuk O., Rashevskaya N., Sukhikh A. 44 CONCEPTUAL MODEL OF GENERATIVE ARTIFICIAL INTELLIGENCE INTEGRATION INTO THE PROCESS OF DEVELOPING INFORMATION AND DIGITAL COMPETENCE IN STUDENTS AT THE BASIC SECONDARY EDUCATION LEVEL..... 44	44
Pavlova N., Dubych K. 53 DISTANCE LEARNING PRACTICAL COURSE 3D GRAPHICS: CHALLENGES AND PROSPECTS FOR IMPLEMENTATION 53	53
Slobodianyuk O. 61 AUGMENTED REALITY IN PHYSICS LESSONS: EXPERIENCE USING PHYSICS LAB AR IN BLENDED LEARNING 61	61
Tkach O. 68 SOLVING MATHEMATICAL PROBLEMS BY HIGH SCHOOL STUDENTS AS AN EFFECTIVE TOOL FOR DEVELOPING THE COMPETENCE OF "ENTREPRENEURSHIP AND FINANCIAL LITERACY" 68	68
Shkolnyi O. 74 METHODOLOGICAL FEATURES OF STUDYING THE BASICS OF FINANCIAL LITERACY IN THE 8TH GRADE MATHEMATICS COURSE OF NUS 74	74
Yurchenko A., Momot R., Ostroha M., Semenikhina O. 80 VISUALIZATION OF KNOWLEDGE BY WEB TECHNOLO- GY IN THE FORMATION OF PRE-SERVICE COMPUTER SCIENCE TEACHERS' CRITICAL THINKING 80	80

ВИКОРИСТАННЯ МАНІПУЛЯТИВІВ У МАТЕМАТИЧНИХ КЛАСАХ ІНКЛЮЗИВНИХ БАЗОВИХ ШКІЛ У ГАНИ

Августіна АДУ ✉

Коледж освіти Святої Луїзи, м. Кумасі, Гана
tinaadu1@hotmail.com
<https://orcid.org/0009-0003-5677-6115>

Джонс АПАВУ

Університет освіти, м. Віннеба, Гана
japawu@uew.edu.gh
<https://orcid.org/0000-0002-1091-9964>

Вільям ОБЕНГ-ДЕНТЕ

Університет науки і технологій імені Кваме Нкруми,
м. Кумасі, Гана
wobengdenteh@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-1865-290X>

MANIPULATIVES USE IN MATHEMATICS CLASSROOMS OF INCLUSIVE BASIC SCHOOLS IN GHANA

Augustina ADU ✉

St. Louis College of Education, Kumasi, Ghana
tinaadu1@hotmail.com
<https://orcid.org/0009-0003-5677-6115>

Jones APAWU

University of Education, Winneba, Ghana
japawu@uew.edu.gh
<https://orcid.org/0000-0002-1091-9964>

William OBENG-DENTEH

Kwame Nkrumah University of Science and Technology, Kumasi,
Ghana
wobengdenteh@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-1865-290X>

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. Математика є важливою складовою життя кожної людини, зокрема й здобувачів освіти з порушеннями зору (ЗПЗ), оскільки сприяє формуванню компетентностей для повсякденного життя та професійної діяльності. Сучасні підходи вимагають розвитку інклюзивних закладів початкової освіти, щоб уникнути дискримінації осіб з інвалідністю. Одним із предметів, який ЗПЗ найскладніше опановують, є математика, оскільки в ній використовуються графічні матеріали, що є важкими для сприйняття ЗПЗ. Дидактичні матеріали допомагають зменшити абстрактність математичних понять, роблячи їх більш «видимими» для ЗПЗ. Попри переваги використання маніпулятивів в інклюзивних початкових класах, бракує досліджень, як ці матеріали застосовуються в інклюзивних початкових школах Гани для покращення розуміння математичних понять. Спираючись на теорію когнітивного та соціального конструктивізму, це дослідження спрямоване на з'ясування того, як учителі математики закладів початкової освіти забезпечують доступність маніпулятивів для ЗПЗ.

Матеріали і методи. Застосовано дослідницький дизайн у форматі case study. Проведено інтерв'ю з 6-ма вчителями математики інклюзивних закладів початкової освіти, а дані проаналізовано за допомогою тематичного аналізу.

Результати. Результати дослідження засвідчили, що більшість учителів не мають маніпулятивів у своїх школах і, відповідно, не використовують їх у процесі навчання математики. Через відсутність практики застосування маніпулятивів для формування математичних понять більшість учителів не можуть чітко окреслити труднощі під час навчання LVI з використанням таких матеріалів.

Висновки. Учителям інклюзивних початкових шкіл Гани доцільно організувати семінари й тренінги щодо використання маніпулятивів у навчанні математики ЗПЗ, щоб підвищити якість їхньої професійної підготовки та ефективність інклюзивного освітнього процесу.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: математичні класи; учні з порушеннями зору; інклюзивна початкова школа; маніпулятиви; Гана.

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Adu A., Apawu J., Obeng-Denteh W. Manipulatives use in mathematics classrooms of inclusive basic schools in Ghana. *Фізико-математична освіта*, 2025. Том 40. № 5. С. 6-13. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i5-01>.

ABSTRACT

Formulation of the problem. Mathematics is essential in every individual's life, including that of Learners with Visual Impairment (LVI), as it helps them acquire the competencies required in their daily life and profession. There is a growing emphasis on inclusive basic schools to avoid discrimination among people with disability, Such as Learners with Visual Impairment (LVI). One subject that LVI finds difficult to understand is mathematics because it utilizes many graphics that are challenging for LVI to comprehend. Manipulative materials help reduce the abstract nature of mathematical concepts by making them more visible to learners, including those with learning difficulties. Despite the benefits of manipulatives in inclusive primary classrooms, there is a lack of research on how manipulatives are used in inclusive primary schools in Ghana to enhance learners' understanding of mathematical concepts. Guided by cognitive and social constructivism theory, this study explores how basic school mathematics teachers make manipulatives accessible to Learners with Visual Impairment (LVI), the support they provide, the assessment strategies they use, and the difficulties they encounter when using manipulatives to teach mathematics to LVI.

Materials and methods. This study employed a case study research design. Six inclusive basic mathematics teachers were interviewed, and the results were analysed thematically.

Results. Findings from the study indicated that most teachers do not have manipulatives in their schools and do not employ them during mathematics instruction. The results also showed that, since most teachers do not use manipulatives in teaching mathematical concepts, they were unable to identify the challenges they face when teaching LVI mathematical concepts with manipulatives.

Conclusions. Based on the outcome of this study, manipulatives for teaching mathematics, especially to LIVs, should be made available in inclusive basic schools in Ghana. Teachers in inclusive basic schools in Ghana should be given workshops and seminars on the use of manipulatives in teaching mathematics to LVI.

KEYWORDS: Mathematics Classrooms; Learners with Visual Impairment; Inclusive Basic School; Manipulatives; Ghana.

FOR CITATION: Adu, A., Apawu, J., & Obeng-Denteh, W. (2025). Manipulatives use in mathematics classrooms of inclusive basic schools in Ghana. *Physical and Mathematical Education*, 40(5), 6-13. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i5-01>.

INTRODUCTION

Mathematics is essential in the life of every student, including learners with visual impairment (LVI). Mathematics equips learners with reasoning and problem-solving skills, which are crucial in the 21st century. As a result of the relevance the subject plays in the daily life of learners, mathematics is seen as one of the compulsory subjects at basic schools, including inclusive basic schools (NBS) in Ghana. Florian (2015) emphasized that inclusive pedagogy aims to support teachers in addressing the diverse needs of individual learners without excluding any students through differential treatment (Lindner & Schwab, 2020). For learners to understand mathematics concepts, students need to develop the skill of extracting information from graphics and applying it to problem-solving tasks (Rosenblum et al., 2018).

Despite the benefits of inclusive education, LVI face challenges in daily activities due to their loss of sight, including difficulties in learning tasks as they lack visual experience, which is a key source of information (Daroni et al., 2018). Ramatea and Khanare (2021) discovered that while teachers, parents, and schools offer assistance to learners with visual impairments (LVI), their educational opportunities may be limited due to various constraints. This limitation in visual information affects their comprehension of concepts, particularly in subjects such as mathematics, where visual instruction is heavily relied upon (Daroni et al., 2018).

However, since graphic materials in the curriculum are primarily visual, many Learners With visual impairment encounter significant difficulties in comprehending them (Zebehazy & Wilton, 2021). Ahmed (2020) noted that many fundamental mathematical concepts are verbally described based on visual observations. Rocha et al. (2021) suggest that individuals with visual impairments may find spatial and directional concepts more challenging to comprehend compared to those without visual impairments. Also, the process of accessing and interpreting information from graphs poses challenges for Learners with visual impairments (Rosenblum & Herzberg, 2015). Research conducted by Aljundi and Altakhayneh (2020) in Jordan revealed that Learners with low vision impairments encounter numerous obstacles in learning mathematics. These Learners often struggle to keep pace with their sighted peers when it comes to mathematical problems that involve visual elements (Zebehazy & Wilton, 2014). Additionally, many teachers of Learners with Visual impairment are aware that their Learners face challenges independently utilizing mathematical graphics (Zebehazy & Wilton, 2014).

To support the success of Learners with visual impairment in mathematics, it is crucial to explore strategies that improve their access to and understanding of mathematical concepts conveyed through graphs (Abrahamson et al., 2019). Implementing equitable pedagogy that engages Learners through various sensory channels beyond vision is necessary for their full participation in teaching (Abrahamson et al., 2019). One such strategy is the use of manipulatives in teaching mathematics in an inclusive primary school. Providing appropriate learning materials is crucial in improving mathematics education for Learners with visual impairment (Oyebanji & Idiong, 2021).

Tjandra (2023) concluded that the incorporation of manipulatives in mathematics instruction can effectively support the learning and integration of Learners with diverse needs. However, educators must be equipped with adequate resources and training to implement manipulatives effectively, and they must also be able to modify manipulatives to cater to the needs of various learners (Tjandra, 2023). Additionally, Okumu (2021) discovered a positive correlation between proficiency in mathematics braille skills and academic performance in mathematics. The use of manipulatives in mathematics education has been proven to enhance Learners' grasp of mathematical concepts and boost their engagement in learning, although this requires specialized training (Tjandra, 2023).

One study conducted by Larbi and Okyere (2016) demonstrated that Learners who incorporated manipulatives in their mathematics education outperformed their peers who did not use manipulatives. Maboya et al. (2020) observed that educators often employed manipulatives mechanically, failing to help Learners move beyond concrete representations of mathematical concepts. According to Quigley (2021), engaging with concrete materials helps learners gain a deeper understanding of mathematical concepts, laying the groundwork for their conceptual knowledge of mathematics.

Emerson and Anderson (2018) observed that Learners with visual impairments demonstrated improved performance on questions related to content when provided with detailed explanations, achieving a maximum correct rate of 29%. In a study by Brawand and Johnson (2016), the effectiveness of methods such as using the Abacus, Braille, tactile graphics, and tangible materials in enhancing mathematical comprehension among Learners with visual impairment was emphasized. Byrne et al. (2023) discovered that manipulatives resources can enhance children's ability to grasp numerical concepts.

Despite the benefits of manipulatives in the inclusive classroom for LVI, teachers' ability to use them effectively with an appropriate teaching strategy is essential in enhancing LVI's understanding of mathematics concepts. Quigley (2021) noted that educators who effectively utilize concrete materials create an environment rich in mathematical opportunities for young learners to analyze concepts and problem-solve. Maboya et al. (2020) found that despite the presence of well-equipped mathematics laboratories, Learners still struggled with the concept-symbol disconnect. Teachers faced challenges in effectively utilizing manipulatives to aid Learners in transitioning cognitively from concrete to pictorial and abstract representations (Maboya et al., 2020). The study conducted by Rule et al. (2011) highlighted a deficiency in teachers' special education skills needed to support Learners with visual impairment in maximizing their potential in mathematics and science.

Additionally, Bell and Silverman (2019) identified concerns regarding the insufficient knowledge of the Nemeth Code among Teachers of the Visually Impaired (TVIs), as well as a tendency to overlook teaching braille math notation to Learners with remaining vision. Furthermore, adult participants with residual vision expressed regret over not having been taught Braille math codes, underscoring the significance of Braille in facilitating participation in the fields of mathematics and science (Bell & Silverman, 2019). This could be a result of the lack of teacher motivation, mentorship in mathematics and science teaching methods, and tools for Learner empowerment, which further discourages Learners with Visual impairment from pursuing these subjects at a higher level (Hayes & Proulx, 2024). For example, Nthibeli et al. (2022) noted that teachers in South Africa were not sufficiently equipped to teach students with autism effectively in inclusive classrooms.

Despite the importance of manipulatives in an inclusive classroom to LVI comprehension of mathematics concepts,

their practical use in the classroom is essential. Despite this, little is known about how manipulatives are used in the mathematics classrooms of inclusive basic schools in Ghana. This is a problem because if these materials are not used effectively, LVI's understanding of mathematics concepts is likely to be compromised. As a result, this study sought to evaluate the use of manipulatives in teaching mathematics in inclusive basic schools in Ghana.

RESEARCH QUESTIONS

1. How do basic school mathematics teachers make manipulatives accessible to LVI during mathematics lessons?
2. What support do the basic school inclusive teachers provide to LVI when using manipulatives in teaching mathematics concepts?
3. What assessment strategies do inclusive basic school teachers use to evaluate Learners with visual impairment when using manipulatives in a mathematics classroom?
4. What kind of difficulty do the inclusive basic school teachers encounter when using manipulatives to teach mathematics to LVI?

THEORETICAL FRAMEWORK

Cognitive and social constructivism theory serves as the theoretical framework for this study. Cognitive constructivism is a theory influenced by Piaget's cognitive development, in which learners are seen as actively constructing their knowledge (Piaget, 1936). Piaget proposed that children progress through four stages of cognitive development – sensorimotor, preoperational, concrete operational, and formal operational – in which they actively build knowledge. The idea of actively constructing knowledge led to the development of radical constructivism (Von Glasersfeld, 2014), which posits that reality is subjective and that there is no absolute truth. For Learners to construct their knowledge effectively, it is important to provide materials and activities that engage them in active exploration and discovery (Bada & Olusegun, 2015). This study is based on cognitive constructivism, as employing manipulatives to teach mathematical concepts in an inclusive classroom, particularly for learners with visual impairments, provides them with hands-on experiences to construct their knowledge independently rather than relying on others for mathematical information during instruction.

Socio-constructivism is developed based on Vygotsky's sociocultural theory (Vygotsky, 1978). This shows that the cognitive development of children is influenced by the cultural and social context in which they live (Vygotsky, 1978). This implies that children's learning is influenced by their personality and the social level. Vygotsky (1978) extended the theory to the interaction that the learner has with the community and family members. McLeod (2020) asserted that there are two significant points in Vygotsky's (1978) theory development. First, the theory suggested that the more skillful, experienced, or knowledgeable individual could be a peer, an elder person, a teacher, or a family member (McLeod, 2020). As a result, learners gain knowledge by interacting with knowledgeable individuals socially (McLeod, 2020). This study selects socio-constructivism theory due to its relevance in inclusive classrooms, where both educators and non-visually impaired learners recognize learners with visual impairments as integral members of the school community. Consequently, LVIs must engage with their sighted counterparts, teachers, and the school community to obtain instructional information for optimal learning. The teacher, who acts as a specialist in knowledge, aids the LVI in grasping mathematical concepts by using manipulatives for instruction. Furthermore, via collaboration and coordination, LVIs and their sighted counterparts coexist to thrive in mathematical education.

McLeod's (2020) second point was the Zone of Proximal Development, which represents the distance between the learner's current level and the level they need to reach through the assistance of an adult. The child's potential for development can only be reached through collaboration and problem-solving with the teacher or high-ability peers (Nino, 2023). In this case, the zone of proximal development refers to the level that a learner needs to reach through partnership, interaction, and encouragement with others rather than the learner alone (Nino, 2023). One of the approaches to teaching is scaffolding, a widely used instructional strategy based on Vygotsky's model of providing support to learners to attain a higher level of understanding (Nino, 2023). In this study, combining both Piaget and Vygotsky can help to identify how basic school mathematics teachers make manipulatives accessible to LVI during mathematics lessons, the support basic school inclusive teachers provide to LVI when using manipulatives for teaching mathematics concepts, the assessment strategies inclusive basic school teachers' uses to evaluate learners with visual impairment when using manipulative in mathematics classroom and the kind of difficulty the inclusive basic school teachers encounter when using manipulative to teach mathematics to LVI.

Manipulatives are physical objects or materials used to represent mathematical concepts, allowing learners to explore, understand, and apply mathematical ideas through hands-on experiences (Tjandra, 2023). These materials can range from everyday objects to specially designed tools, facilitating a concrete representation of abstract mathematical concepts. Typology of Manipulatives include: concrete manipulative (Physical objects such as blocks, counting bears, abacus or base-ten blocks that represent mathematical concepts,), virtual manipulative (Digital tools and simulations that mimic physical manipulatives, accessible through computers or tablets) and tactile manipulative: Materials designed for tactile exploration, such as Braille blocks or tactile graphs, beneficial for Learners with Visual Impairment (LVI).

Manipulatives can be used in various instructional settings to enhance learners' understanding of mathematical concepts (Oyebanji & Idiong, 2021). For all learners, manipulatives offer a hands-on approach to learning, making abstract concepts more tangible, encouraging active participation and engagement in the learning process, and supporting differentiated instruction, which allows teachers to cater to diverse learning styles. For LVI, manipulatives need to be adapted to ensure accessibility and effectiveness. For example, tactile manipulatives that allow learners to explore mathematical concepts through touch, incorporating Braille and large print labels on manipulatives to facilitate understanding. Additionally, the use of digital tools and apps that provide auditory or tactile feedback enhances the learning experience for LVI. Furthermore, the development of customized manipulatives that cater to the specific needs of LVI ensures they can fully engage with mathematical concepts (Oyebanji & Idiong, 2021).

RESEARCH METHODS

Research Approach

A case study under a qualitative research approach was adopted for this study (Creswell & Creswell, 2018). This approach was chosen because the focus of this study was to ascertain how manipulatives are used in inclusive basic schools during mathematics instruction.

Selection of the participants

To achieve this objective, six mathematics teachers were purposively selected from three inclusive basic schools in Ghana. These schools are accepted as inclusive basic schools, where LVI are mixed with regular learners. These teachers include three junior high school mathematics teachers and three primary school mathematics teachers. With the Junior High School, only mathematics teachers were selected. However, the primary teaching method is class teaching. Any teacher teaching in the upper primary or early grade levels teaches mathematics, and as such, is selected to participate in the study.

Data Collection Instrument

Data were collected using a structured interview guide to gather detailed information on the use of manipulatives in inclusive primary schools during mathematics instruction.

Data Collection Procedure

Before data collection, the researcher obtained ethical clearance from the Humanities and Social Sciences Research Ethics Committee of Kwame Nkrumah University of Science and Technology to ensure the study was safe and did not cause harm to any participants. This was followed by a letter of permission from the Department of Teacher Education at KNUST, which allowed us to seek permission from the school and its teachers prior to data collection. The researcher visited the school seven days prior to the data collection day to obtain verbal permission from the teachers and to request that they sign both the consent form and the participants' information sheet. This helped the participants understand the objectives and nature of the study that was conducted. The data collection lasted for ten days, with each teacher using approximately 40 minutes. The interviews were conducted at the convenient places chosen by the teachers in their respective schools. The interview was recorded using the researchers' phone, with the participants' consent, and was password-protected to prevent access by a third party.

Data analysis

The audio data was later transcribed and analyzed thematically, based on the thematic analysis procedure outlined by Creswell and Creswell (2018).

RESEARCH RESULTS

1. How do basic school mathematics teachers make manipulatives (for LVI) accessible to LVI during mathematics lessons?**Availability of Manipulative Materials to make mathematics accessible to LVI**

Teacher 1: "The counters are the only materials LVI have access to with the help of their sighted peers, who bring them from the environment."

Teacher 2: "The materials are not available in my school, so I am not able to make them accessible to the learners."

Teacher 3: "As for the counting, I will let their friends go for the counters as well for them. They will collect it and bring it to them. I do not let them collect it for themselves, okay."

Teacher 4: "The only material we have in this school for the LVIs is the braille machine and the braille sheets, which are given to the learner beforehand, the instruction."

Teacher 5: "I only give the braille machine to the learners, and no other materials are added since they are not available in this school."

Teacher 6: "I do not give any materials to them; I only use chalkboard illustrations. My school does not have an abacus and all the special materials to teach mathematics concepts to the LVIs."

Use of Existing Braille Resources

Teacher 3: "The braille is with them. They are having it. They know how to braille."

Teacher 4: "The braille machine and the braille sheets are given to the learner beforehand, before the instruction."

Teacher 5: "I only give the braille machine to the learners."

The results indicated that there is an unavailability of special materials, such as an abacus and tactile materials, and hence, mathematics teachers do not employ them during mathematics instruction. The results also indicated that mathematics teachers rely on LVI peers for support in making materials such as counters accessible to learners. Three of the six teachers mentioned the use of Braille by their LVIs.

2. What support do basic school inclusive teachers provide to LVI in the absence of manipulatives when teaching mathematics concepts?**One-on-One Support and Explanation**

Teacher 1: "I get close to the students to help them with the use of the manipulatives, which are mostly counters, to assist them in getting the quantities they count right."

Teacher 2: "I go to them and find out if they understand the concept, and give more explanations in the form of a description on the concept being taught to them."

Teacher 5: "I always go to them to find out if they are getting the concepts I am teaching."

Descriptive Method and Adaptation

Teacher 3: "To LVIs, I repeat examples by describing the task to be done slowly to enable them to braille down what is said."

Teacher 4: "I use the descriptive method for them to understand what I am teaching. I sometimes hold their hand to help them describe a concept. I have to describe everything I am doing to them."

Support from Resource Teacher

Teacher 6: "Sometimes, their resource teacher comes around to help them during mathematics instruction to braille the mathematics symbols they are not familiar with..."

Whole-Class Instruction with Adaptation for LVI

Teacher 3: "I explain the concept I am teaching to the whole class with examples."

The results indicated that the support mathematics teachers provide to LVI during instruction includes: one-on-one support and explanation, the use of descriptive methods and adaptation, support from the resource teacher, and whole-class instruction with adaptation for LVI.

3. What assessment strategies do inclusive basic school teachers use to evaluate Learners with visual impairment when using manipulatives in a mathematics classroom?**Class Exercise for All Learners with Accommodations**

Teacher 1: "LVIs are given the same questions as their sighted peers; ... I read the questions to LVIs several times. Also, their friends may write it for them and send it to their resource facilitator to braille it for them."

Teacher 2: "I give LVI the same questions as the Learners who can see, and I read the questions aloud for them to braille and answer, which their resource facilitator later transcribes for marking".

Teacher 3: "I will just give all Learners the same exercise, and their colleagues will read for them."

Teacher 4: "I just give them a class exercise in written form. While their friends read it out to them in braille."

Teacher 5: "I give them the same exercise as their sighted peers, who read it out to them in Braille."

Oral Assessment

Teacher 6: "I ask them oral questions to ascertain whether they understand what I am teaching or not."

The results indicated that five teachers assigned the same class exercises to all learners with accommodations, while one teacher asked oral questions during instruction. Giving the same exercise to both LVI and other learners is good practice, as it eliminates discrimination between the two diverse groups of learners. The oral questioning, on the other hand, serves as feedback to the teacher to assess the LVIs' progress in the instruction given.

4. What kind of difficulty do you, as an inclusive basic school teacher, encounter when using manipulatives to teach mathematics to LVI?**Unavailability of Materials**

Teacher 1: "The manipulatives are not available in my school, so I do not encounter any problem because I do not use them."

Teacher 4: "I do not use manipulatives in my lessons..."

Teacher 5: "The materials are not available, so I do not use them..."

Teacher 2: "I do not use manipulatives to teach them..."

Teacher 6 mentions not using materials, but frames the difficulty in teaching mathematics to LVI differently.

Lack of Knowledge or Training in Using Manipulatives

Teacher 3: "The resource person for LVI may not know all the concepts and the materials to use in teaching certain concepts in mathematics; therefore, I cannot resort to him for assistance during mathematics instructions."

Teacher 4: "I do not know the manipulatives I can use to teach mathematics to LVI, I do not have any expertise in manipulatives for teaching LVI."

Teacher 3 also mentions a lack of support, which could be seen as related, but is more about the knowledge of the resource person and school support.

Challenges with Braille Mathematical Symbols

Teacher 3: "Braille mathematical symbols for the learners to use is complicated."

Teacher 5: "But most of the time, the LVIs do not do exercise, they complain that they do not know how to braille special mathematical symbols."

Teacher 6: "Teaching mathematics to LVI is challenging, especially when symbols are involved. "

Lack of Support

Teacher 3: "The school and the resource person do not support us in making the teaching resources..."

The results indicated that the challenges mathematics teachers face include the unavailability of materials, a lack of knowledge or training in using manipulatives, difficulties with braille mathematical symbols, and inadequate support.

DISCUSSION OF THE RESULTS

The results indicated that there is an unavailability of materials to make mathematics accessible to LVI, and therefore, mathematics teachers do not employ them during mathematics instruction. The results also indicated that mathematics teachers rely on LVI peers for support and the use of existing braille resources. Most teachers indicated that they do not have the necessary materials and therefore do not use them during mathematics instruction. This could make LVI struggle to keep pace with their sighted peers when it comes to mathematical problem-solving that involves visual elements (Zebehazy & Wilton, 2014). This contradicts the assertion that providing appropriate learning materials is crucial in improving mathematics education for visually impaired students (Oyebanji & Idiong, 2021). This implies that teachers abstractly present mathematical concepts, thereby making understanding difficult, especially for LVI in the inclusive classroom (Mungunda, 2023). This contradicts the tenet of constructivism, which advocates for the use of materials during instruction (Piaget, 1983; Vygotsky, 1986).

The unavailability of materials significantly impedes the implementation of constructivist principles in mathematics instruction for LVI. According to Vygotsky's theory, practical learning occurs within the Zone of Proximal Development (ZPD), where learners are challenged appropriately with the proper support. Without access to manipulatives, teachers are unable to provide the hands-on learning experiences that are crucial for understanding mathematical concepts, particularly for LVI who

may benefit from tactile or adapted materials. This absence of resources limits the potential for scaffolding and differentiated instruction, key components of effective teaching within the ZPD framework (Vygotsky, 1978).

Others indicated that the materials are made available to the LVI through classmates of the LVI, who can see. One teacher indicated that she gives the braille machine to LVI in her classroom. The given material, for example, braille, may not be fully utilized when teachers lack knowledge on how to use it. Bell and Silverman (2019) identified concerns regarding the insufficient knowledge of the Nemeth Code among Teachers of the Visually Impaired (TVIs), as well as a tendency to overlook teaching braille math notation to Learners with remaining vision. Furthermore, if learners' friends provide the LVI with materials without assisting the LVI in using them during mathematics instruction, this will not benefit the learners. This could be because it is challenging to braille some mathematical symbols and shapes. This could be as a result of the lack of teacher motivation, mentorship in mathematics and science teaching methods, and tools for learners' empowerment, further discouraging LVI from pursuing these subjects at a higher level (Hayes & Proulx, 2024). For example, Nthibeli et al. (2022) noted that teachers in South Africa were not sufficiently equipped to teach students with autism effectively in inclusive classrooms. The study conducted by Rule et al. (2011) highlighted a deficiency in teachers' special education skills needed to support Learners with Visual Impairment in maximizing their potential in mathematics and science.

The results indicated that the support mathematics teachers provide to LVI during instruction includes: one-on-one support and explanation, the use of descriptive methods and adaptation, support from the resource teacher, and whole-class instruction with adaptation for LVI. The reliance on peers for support and the use of existing braille resources can be seen as a form of scaffolding within the ZPD (Vygotsky, 1978). Peers can offer temporary support, helping LVI navigate through challenging mathematical tasks. However, this approach may not always be effective or consistent, as peer understanding and ability to explain concepts can vary. The use of existing braille resources is a positive step towards inclusivity, but it highlights the need for more tailored and comprehensive resources to fully support LVI. This finding underscores the importance of trained educators who can provide targeted support, aligning with Vygotsky's emphasis on the role of more knowledgeable others in facilitating learning.

To provide support to the LVI during instruction, teachers indicated that they approach them to determine if they are grasping the concepts or experiencing issues with certain aspects of the lessons. The support practices reported by teachers, including one-on-one support and explanation, use of descriptive methods and adaptation, support from resource teachers, and whole-class instruction with adaptation for LVI, demonstrate attempts to scaffold learning within the ZPD (Vygotsky, 1978). These practices reflect an understanding of the need for differentiated instruction and support tailored to the individual needs of LVI. The use of descriptive methods, in particular, aligns with constructivist principles by facilitating active engagement and understanding through verbal explanations and adaptations. This aligns with Vygotsky's sociocultural theory (Vygotsky, 1978), which posits that learners interact with their teachers to develop cognitively. This implies that some of these teachers pay attention to these LVI and make sure that every learner benefits from the classroom instruction. Others indicated that they sometimes receive special assistance from the resource person to help with LVI during mathematics lessons. This is the case where the school has a resource person for LVI to assist them in their learning. The problem arises when some resource persons struggle with mathematical concepts and, as a result, find it challenging to communicate with LVI (Belay & Yihun, 2020). This can affect LVI's understanding of mathematical concepts. This lack of teacher motivation, mentorship in mathematics and science teaching methods, and tools for student empowerment further discourages visually impaired students from pursuing these subjects at a higher level (Hayes & Proulx, 2024). In some cases, where these resource persons are few, and they have to assist different LVI in different classrooms, it becomes difficult to provide adequate support to these LVI, especially in the mathematics classroom (Belay & Yihun, 2020).

Additionally, the results showed that teachers provide the same class exercise for all learners, with accommodations and oral questions during instruction (De Verdier, 2016). The practice of administering the same exercise to both LVI and other learners is a good practice, as it eliminates discrimination among the two diverse groups of learners (De Verdier, 2016). Although giving them the same exercise is beneficial, the issue is how these teachers help learners understand mathematical symbols and how LVI can braille these symbols (Nthibeli et al., 2022). The same exercises could be assigned as a result of the syllabus requirement for teaching mathematics at the basic level. Providing the same class exercises for all learners with accommodations is a practice that aligns with both Piaget's and Vygotsky's theories. It promotes inclusivity and recognizes the potential of all learners to engage with the same mathematical content, albeit through different means. This approach supports the constructivist view that learning is an active process and that learners construct knowledge in ways that are meaningful to them. By adapting exercises to meet the needs of LVI, teachers can ensure that these learners are not disadvantaged and can fully participate in the learning process.

Finally, the results indicated that the challenges mathematics teachers face include the unavailability of materials, a lack of knowledge or training in using manipulatives, difficulties with braille mathematical symbols, and inadequate support. The challenges directly impact the ability of teachers to provide effective scaffolding and support within the ZPD (McLeod, 2020). The unavailability of manipulatives may affect their usage during instruction in the inclusive mathematics classroom, as LVI learners learn through kinesthetic and auditory means, thereby impacting LVI performance in mathematics (Okumu, 2021). This also contradicts the tenet of constructivism, which insists on the use of manipulatives or materials in instruction (Piaget, 1983). This contradicts the study by Brawand and Johnson (2016), which emphasized the effectiveness of methods such as using the Abacus, Braille, tactile graphics, and tangible materials in enhancing mathematical comprehension among visually impaired students. Byrne et al. (2023) discovered that manipulative resources can enhance children's ability to grasp numerical concepts.

However, one teacher indicated that they recognize that some mathematical symbols make the lesson difficult, as supported by the finding that many teachers of visually impaired students note that their students face challenges in independently utilizing mathematical graphics (Zebehazi & Wilton, 2014). Numerous mathematics textbooks incorporate visual graphics that contain crucial topic information not well conveyed in either Braille books or digital renditions of the texts (Emerson & Anderson, 2018). Okumu et al. (2021) attribute LVI's poor performance in Mathematics to poor proficiency with the use of the

braille machine. This is because LVI typically uses braille machines to communicate mathematical ideas, and any deficiencies with the use of these braille machines can automatically affect LVI's performance in Mathematics. This finding aligns with the findings of Morelle and Tabane (2019), which shed light on the challenges faced by visually impaired learners in South African township mainstream primary schools. The study highlighted the inadequacies in the implementation of inclusive education, including a lack of proper support, limited adaptation of teaching methods and materials, and inaccessible physical environments within schools.

LIMITATIONS

This study is without limitations. The limitations of this study include a small sample size, a focus on a specific national context (Ghana), and the sole reliance on self-reported interview data. This study was also limited to the use of manipulatives in an inclusive mathematics classroom in Ghana.

CONCLUSION AND RECOMMENDATION

This study aimed to investigate the manipulative use in inclusive mathematics classrooms of basic schools in Ghana. The finding indicated that most teachers do not have access to these materials and hence do not employ them during mathematics instruction. Others indicated that the materials are made available to them through classmates of LVI, who can see them. The fact that these teachers do not use manipulatives in their instruction could hinder the understanding of mathematics concepts by LVI. In addition, it was found that to provide support to the LVI during instruction, some teachers indicated that they approach them to determine if they are grasping the concepts or experiencing issues with certain aspects of the lessons. This helps teachers identify LVI difficulties and address them during or after instruction. Others indicated that they sometimes receive special assistance from the resource person to help with LVI during mathematics lessons. The finding also indicated that teachers give written and oral questions to LVI and other colleagues during instruction. Giving the same exercise to both LVI and other learners is good practice, as it eliminates discrimination between the two diverse groups of learners. In addition, the results indicated that since most teachers do not use manipulatives in teaching mathematics concepts, they were unable to identify the challenges they face when teaching mathematics concepts in inclusive classrooms. However, one teacher indicated that the recognition of some mathematical symbols by LVI makes the lesson difficult, as they cannot visualize those symbols. Finally, sometimes the resource person for LVI may not be familiar with all the concepts and materials, making it difficult to bring them to the learners for use. Based on the findings, it is recommended that heads of the inclusive basic schools in Ghana collaborate with the Ghana Education Service to provide manipulative materials to these schools. In addition, teachers should receive in-service training on how to effectively teach mathematics concepts using specific manipulatives in the classroom. Finally, through professional development sections, resource persons can be provided with assistance on the mathematics concepts taught in various classrooms of inclusive basic schools in Ghana. This will help the resource persons become familiar with the mathematical concepts and symbols, enabling them to effectively communicate these concepts to LVI or assist in braille translation of mathematical concepts.

CONFLICT OF INTEREST

The authors declare no financial, personal, or other interests that could be considered a potential conflict of interest regarding the publication of this article.

FUNDING SOURCES

This research did not receive any specific grant from funding agencies in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

DATA AVAILABILITY

This is a theoretical study and does not involve the use of any additional datasets.

USE OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE (AI) TOOLS

AI tools were not used in the writing of this work.

REFERENCES

1. Abrahamson, D., Nathan, M. J., Williams-Pierce, C., Walkington, C., Ottmar, E. R., Soto, H., & Alibali, M. W. (2020, August). The future of embodied design for mathematics teaching and learning. In *Frontiers in Education*, 5, 147. Frontiers Media SA.
2. Ahmed, I. (2020). *Mathematics Education from a Non-Visual and Disability Studies Perspective: Experiences of Students, Families, and Educators*. The Ohio State University.
3. Aljundi, K., & Altakhayneh, B. (2020). Obstacles to Blind Students' Learning Maths in Jordan from Students' and Teachers' Perspectives. *International Education Studies*, 13(8), 1-5.
4. Bada, S. O., & Olusegun, S. (2015). Constructivism learning theory: A paradigm for teaching and learning. *Journal of Research & Method in Education*, 5(6), 66-70.
5. Belay, M. A., & Yihun, S. G. (2020). The Challenges and Opportunities of Visually Impaired Students in Inclusive Education: The Case of Bedlu. *Journal of Pedagogical Research*, 4(2), 112-124.
6. Bell, E. C., & Silverman, A. M. (2019). Access to math and science content for youth who are blind or visually impaired. *Journal of Blindness Innovation and Research*, 9(1).
7. Brawand, A., & Johnson, N. (2016). Effective methods for delivering mathematics instruction to students with visual impairments.

8. Byrne, E. M., Jensen, H., Thomsen, B. S., & Ramchandani, P. G. (2023). Educational Interventions Involving Physical Manipulatives for Improving Children's Learning and Development: A Scoping Review. *Review of Education*, 11(2), e3400.
9. Creswell, J. W., & Creswell, J. D. (2018). *Research Design (Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches)* (H. Salmon, C. Neve, M. O'Heffernan, D. C. Felts, & A. Marks (eds.); 7th ed.). SAGE Publications Ltd.
10. Dabi, G., & Golga, D. (2024). The role of assistive technology in supporting the engagement of students with visual impairment in learning mathematics: An integrative literature review. *British Journal of Visual Impairment*, 42(3), 674-687.
11. Daroni, G. A., Gunarhadi, G., & Legowo, E. (2018). Assistive technology in mathematics learning for visually impaired students. *Tadris: Jurnal Keguruan Dan Ilmu Tarbiyah*, 3(1), 1-9.
12. De Verdier, K. (2016). Inclusion in and out of the classroom: A longitudinal study of students with visual impairments in inclusive education. *British Journal of Visual Impairment*, 34(2), 130-140.
13. Emerson, R. W., & Anderson, D. L. (2018). Using description to convey mathematics content in visual images to students who are visually impaired. *Journal of Visual Impairment & Blindness*, 112(2), 157-168.
14. Emerson, R. W., & Anderson, D. L. (2018). Using description to convey mathematics content in visual images to students who are visually impaired. *Journal of Visual Impairment & Blindness*, 112(2), 157-168.
15. Hayes, C., & Proulx, M. J. (2024). Turning a blind eye? Removing barriers to science and mathematics education for students with visual impairments. *British Journal of Visual Impairment*, 42(2), 544-556.
16. Hayes, C., & Proulx, M. J. (2024). Turning a blind eye? Removing barriers to science and mathematics education for students with visual impairments. *British Journal of Visual Impairment*, 42(2), 544-556.
17. Larbi, E., & Okyere, M. (2016). The Use of Manipulatives in Mathematics Education. *Journal of Education and Practice*, 7(36), 53-61.
18. Lindner, K. T., & Schwab, S. (2020). Differentiation and individualisation in inclusive education: a systematic review and narrative synthesis. *International journal of inclusive education*, 1-21.
19. Maboya, M. J., Jita, L. C., & Chimbi, G. T. (2020). South African teachers' beliefs and the use of manipulatives to resolve the concept-symbol schism in mathematics learning. *Universal Journal of Educational Research*, 8(11), 5414-5424.
20. Morelle, M., & Tabane, R. (2019). Challenges Experienced by Learners with Visual Impairments in South African Township Mainstream Primary Schools. *South African Journal of Education*, 39(3), 1-6. Morgan, H. (2022). Conducting a qualitative document analysis. *The Qualitative Report*, 27(1), 64-77.
21. Mungunda, A. E. (2023). *Challenges faced by mathematics teachers in teaching secondary school learners with visual impairment in the Khomas region* (Doctoral dissertation, University of Namibia).
22. Nino, T. (2023). Constructivism as a theory of learning (foundations and significance). *Basics of Learning the Latest Theories and Methods*, 9, 228.
23. Nthibeli, M., Griffiths, D., & Bekker, T. (2022). Teaching Learners with Autism in the South African Inclusive Classroom: Pedagogic Strategies and Possibilities. *African Journal of Disability*, 11, 979.
24. Okumu, M. O., Murugami, M. W., & Mazrui, L. M. (2021). Influence of Mathematics Braille Proficiency on Mathematics Performance among Learners with Visual Impairment in Selected Special Secondary Schools in Kenya. *European Journal of Special Education Research*, 7(2).
25. Okumu, M. O., Murugami, M. W., & Mazrui, L. M. (2021). Influence of Mathematics Braille Proficiency on Mathematics Performance among Learners with Visual Impairment in Selected Special Secondary Schools in Kenya. *European Journal of Special Education Research*, 7(2).
26. Oyebanji, M. S., & Idiong, U. S. (2021). Challenges of Teaching Mathematics to Students with Visual Impairment. *Malikussaleh Journal of Mathematics Learning*, 4(1), 1-6.
27. Piaget, J. (1936). *Origins of Intelligence in the Child*. London: Routledge & Kegan Paul.
28. Piaget, J. (1936). *Origins of Intelligence in the Child*. London: Routledge & Kegan Paul.
29. Pinto, M., & Tall, D. (2002). Building formal mathematics on visual imagery: A case study and a theory. *For the learning of mathematics*, 22(1), 2-10.
30. Quigley, M. T. (2021). Concrete Materials in Primary Classrooms: Teachers' Beliefs and Practices about How and Why They Are Used. *Mathematics Teacher Education and Development*, 23(2), 59-78.
31. Ramatea, M. A., & Khanare, F. P. (2021). Improving the well-being of learners with visual impairments in rural Lesotho schools: An asset-based approach. *International Journal of Qualitative Studies on Health and Well-being*, 16(1), 1890341.
32. Rocha, F., Pires, A. C., Neto, I., Nicolau, H., & Guerreiro, T. (2021, June). Assembly at home: Accessible spatial programming for children with visual impairments and their families. In *Proceedings of the 20th Annual ACM Interaction Design and Children Conference* (pp. 100-111).
33. Rosenblum, L. P., & Herzberg, T. S. (2015). Braille and Tactile Graphics: Youth with Visual Impairments Share Their Experiences. *Journal of Visual Impairment & Blindness*, 109(3), 173-184.
34. Rosenblum, L. P., Cheng, L., & Beal, C. R. (2018). Teachers of students with visual impairments share experiences and advice for supporting students in understanding graphics. *Journal of visual impairment & blindness*, 112(5), 475-487.
35. Rule, A. C., Stefanich, G. P., Boody, R. M., & Peiffer, B. (2011). Impact of adaptive materials on teachers and their students with visual impairments in secondary science and mathematics classes. *International Journal of Science Education*, 33(6), 865-887.
36. Tjandra, C. (2023). Effectiveness of using manipulatives in mathematics teaching in inclusive education programs in an elementary school. *Dharmas Education Journal (DE_Journal)*, 4(1), 168-178.
37. Von Glasersfeld, E. (2014). Piaget and the radical constructivist epistemology. *Costruttivismi*, 1(2), 94-107.
38. Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes*. M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner, & E. Souberman (Eds.). Cambridge, MA: Harvard University Press.
39. Zebehazy, K. T., & Wilton, A. P. (2014). Straight from the source: Perceptions of students with visual impairments about graphic use. *Journal of Visual Impairment & Blindness*, 108(4), 275-286.
40. Zebehazy, K. T., & Wilton, A. P. (2021). Graphic reading performance of students with visual impairments and its implications for instruction and assessment. *Journal of Visual Impairment & Blindness*, 115(3), 215-227.

| Received: 28.05.2025 | Accepted: 16.08.2025 | Published: 28.11.2025 |



This work is licensed under Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.



ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА (PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION)

p-ISSN: 2413-1571, e-ISSN: 2413-158X

2025, 40(5), <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i5-02>

УДК: 53:371.26

ОСОБЛИВОСТІ ТЕСТІВ І ТЕСТОВОГО КОНТРОЛЮ НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ З ФІЗИКИ

Марк БОСІН ✉

Муніципальний заклад «Харківська гуманітарно-педагогічна академія» Харківської обласної ради, Україна
markbosin40@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0003-3840-6439>

Лариса РИКОВА

Муніципальний заклад «Харківська гуманітарно-педагогічна академія» Харківської обласної ради, Україна
larisakharkov@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0003-4578-2192>

Галина БРОСЛАВСЬКА

Муніципальний заклад «Харківська гуманітарно-педагогічна академія» Харківської обласної ради, Україна
broslavska2010@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-9839-4604>

FEATURES OF TESTS AND TEST CONTROL OF ACADEMIC ACHIEVEMENTS IN PHYSICS

Mark BOSIN ✉

Municipal Establishment «Kharkiv Humanitarian-Pedagogical Academy» of the Kharkiv Regional Council, Ukraine
markbosin40@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0003-3840-6439>

Larysa RYKOVA

Municipal Establishment «Kharkiv Humanitarian-Pedagogical Academy» of the Kharkiv Regional Council, Ukraine
larisakharkov@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0003-4578-2192>

Halyna BROSLAVSKA

Municipal Establishment «Kharkiv Humanitarian-Pedagogical Academy» of the Kharkiv Regional Council, Ukraine
broslavska2010@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-9839-4604>

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. Контроль навчальних досягнень учнів або студентів є невід'ємним компонентом навчального процесу. Однією з форм контролю є тестування. Основною дослідницькою задачею даної роботи є подолання конкретних труднощів тестування при навчанні фізики, а точніше – деяких її розділів, які потребують при складанні тестів відхилень від стандартних методів тестування. Аналіз цих відхилень разом з демонстрацією їх використання є основною проблемою даного дослідження.

Матеріали і методи. Основними матеріалами даного дослідження є роботи наших колег, а також наш власний досвід викладання фізики у різних ЗВО м. Харкова. Більшість власних матеріалів було статистично оброблено. Велику користь принесло також уважне перечитування окремих глав книг, написаних великими фізиками, зокрема Альбертом Ейнштейном, Максом Планком, Ервіном Шредінгером, Луї де Бройлем тощо. До основних методів дослідження відноситься, перш за все, аналіз робіт, присвячених педагогічному тестуванню в фізиці, а також використання результатів аналізу авторами своїх висновків, зроблених на базі власного багаторічного досвіду викладання.

Результати. Всі особливості при складанні тестових завдань з фізики пов'язані з особливостями фізичної науки. Ці особливості обумовлені двома факторами. Перший фактор – у великому обсязі фізичних розділів велика кількість явищ мають подвійну, а іноді й потрібну природу, наприклад, квантово-хвильовий дуалізм, нерелятивістські та релятивістські уявлення. Саме в таких випадках виникають ті труднощі при складанні тестових завдань, які призводять до особливостей останніх. Другий фактор – відсутність строгих теорій для деяких експериментально винайдених явищ (хоча для них існують серйозні гіпотези). У зв'язку з цим складання тестових завдань також потребує нових підходів. Основною особливістю складання тестових завдань в цих випадках за досвідом авторів є представлення кожного тестового завдання у вигляді невеликої серії

ABSTRACT

Formulation of the problem. The assessment of students' academic performance constitutes an integral component of the educational process, with testing being one of the most widely applied forms of assessment. The principal research objective of this study is to address specific challenges arising in the development of test items in physics education, particularly in certain domains that necessitate deviations from conventional testing approaches. The analysis of such deviations, combined with the demonstration of their practical implementation, represents the core problem explored in this work.

Materials and methods. The materials underpinning this research comprise both the scholarly contributions of colleagues and the authors' own pedagogical experience in teaching physics across several higher education institutions in Kharkiv. A significant portion of the authors' materials was subjected to statistical analysis. Additionally, the careful examination of selected chapters from seminal works authored by eminent physicists – such as Albert Einstein, Max Planck, Erwin Schrödinger, and Louis de Broglie – proved highly valuable. The primary methodological framework employed in this study involves a comprehensive analysis of research on pedagogical testing in physics, as well as the systematic application of the authors' conclusions, derived from extensive teaching practice.

Results. The distinctive features encountered in the construction of physics test items are intrinsically linked to the nature of the discipline itself. These features are determined by two principal factors. The first concerns the fact that within many branches of physics, numerous phenomena exhibit dual or even multiple interpretations (e.g., wave-particle duality, non-relativistic and relativistic formulations). Such cases pose significant difficulties for test design and necessitate the adoption of non-standard approaches. The second factor lies in the absence of rigorously established theories for certain experimentally discovered phenomena, although well-founded hypotheses exist to account for them. Accordingly, formulating test tasks in such instances requires innovative strategies. Drawing upon the authors' experience, the most effective approach involves presenting each test item as a structured sequence of smaller,

дрібніших завдань, певним чином розташованих. Цей прийом показав себе як дієвий.

Висновки. В тих випадках, коли фізичні об'єкти або явища за різних умов мають різні, але математично узгоджені теорії, і структура, і зміст тестів залежать від кількості теоретичних підходів і від складності математичного зв'язку між ними. Якщо фізичні об'єкти або явища не мають строгих (доведених) теоретичних підходів, а мають лише припущення (гіпотези), то структура тестів залежить від кількості гіпотез та експериментів, що приводять до цих гіпотез, а зміст повинен містити в собі матеріал, який дозволяє оцінювати ймовірність кожної з гіпотез. Таке тестування, як свідчить викладацький досвід авторів, дозволяє дуже точно оцінити розуміння студентами складних фізичних явищ. Крім цього, аналіз результатів такого тестування часто допомагає викладачеві удосконалити методику викладання.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: тест; тестовий контроль; рівень складності; правильна відповідь; фізика; квантова фізика; явище; процес.

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Босін М., Рикова Л., Брославська Г. Особливості тестів і тестового контролю навчальних досягнень з фізики. *Фізико-математична освіта*, 2025. Том 40. № 5. С. 14-20. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i5-02>.

interrelated sub-tasks. This technique has demonstrated considerable pedagogical efficacy.

Conclusions. In situations where physical objects or phenomena are described by multiple, mathematically consistent theoretical frameworks, both the structure and the content of test items depend on the number of the theoretical approaches considered and the complexity of the mathematical relationships between them. Conversely, when physical objects or phenomena are characterized not by established theories but by provisional hypotheses, the structure of test items should reflect the number of such hypotheses and the experimental evidence underlying them. In this case, the content must be designed to enable the assessment of the relative plausibility of each hypothesis. As indicated by the authors' teaching experience, this type of testing provides a highly accurate measure of students' comprehension of complex physical phenomena. Furthermore, analyzing test results often helps instructors refine and improve their instructional methodologies.

KEYWORDS: testing; assessment; level of complexity; correct response; physics; quantum physics; phenomenon; process.

FOR CITATION: Bosin, M., Rykova, L., & Broslavska, H. (2025). Features of tests and test control of academic achievements in physics. *Physical and Mathematical Education*, 40(5), 14-20. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i5-02>.

ВСТУП

Постановка проблеми. У сучасних умовах трансформації освіти тестування є одним з найбільш ефективних і найпоширеніших методів контролю навчальних досягнень студентів. Тестування дозволяє швидко, зручно та інформативно оцінити рівень знань, умінь та компетентностей здобувачів освіти. З огляду на специфіку навчальної дисципліни «фізика» тестовий контроль потребує особливого підходу – як у формуванні завдань, так і в їхньому педагогічному аналізі.

Аналіз актуальних досліджень. Проблематика тестового оцінювання в освіті активно вивчається як у вітчизняній, так і в зарубіжній педагогічній науці. Теоретичні основи тестології закладено в працях М. Круча, Б. Блума, Р. Тайлера, Л. Кронбаха та інших., які досліджували питання валідності, надійності та цілей освітнього оцінювання. В українському освітньому просторі значний внесок у розвиток методик контролю знань зробили О. Ярошенко, Л. Кухар, Я. Болюбаш, І. Булах, А. Касперський, С. Подласов, Л. Білоусова та інші дослідники, які акцентують увагу на адаптації тестових технологій до умов національної освіти та на особливостях дидактичного проектування тестів. Автори робіт, присвячених тестовому контролю навчальних досягнень, досліджують проблему в різних аспектах. Так, на визначення мети та функцій тестового контролю, обґрунтування вимог до педагогічного тесту спрямовані дослідження В. Кулішова (Kulishov, 2022), Н. Ревуцької (Revutska, 2015), переваги та недоліки використання тестового контролю знань студентів аналізують І. Адамова, К. Багрий (Adamova et al., 2015), О. Грабовський, О. Кисельова (Kyselova et al., 2023). Проблеми створення тестів присвячені дослідження І. Булах, Я. Болюбаша, М. Мруги, О. Кисельової, В. Кулішова, Л. Кухар, Н. Ревуцької, В. Сергієнка. Педагоги О. Грабовський, О. Кисельова, Г. Мороховець (Morokhovets, 2018) досліджують питання щодо місця освітніх вимірювань у системі забезпечення якості освіти. Багато робіт, особливо останнім часом, присвячено проблемам комп'ютерного тестування (дослідники Л. Білоусова, О. Глазунова, Т. Іщенко, В. Ільїн, Н. Морзе, Г. Мороховець та ін.). У світлі тематики нашого дослідження привертають увагу роботи, присвячені тестуванню учнів та студентів навчальних досягнень з фізики (А. Касперського, Р. Кухарчука, І. Булах, М. Мруги, С. Подласова). У галузі дидактики фізики тестовий контроль розглядається як засіб перевірки не лише фактичних знань, а й умінь застосовувати фізичні закони до розв'язання практичних і нестандартних задач. Дослідники аналізують специфіку побудови якісних і кількісних тестових завдань, важливість їх відповідності освітнім цілям та компетентнісному підходу. Особливе значення мають роботи, присвячені тестовому оцінюванню експериментальних навичок, що є унікальним аспектом фізичної освіти. Таким чином, тестовий контроль у фізичній освіті розглядається як багатофункціональний інструмент, що потребує методичної виваженості, психолого-педагогічного підґрунтя та відповідності сучасним освітнім викликам.

Фізика як наука не тільки формує у студентів науковий світогляд, але й розвиває логічне, критичне та експериментальне мислення. Але є особливості цієї навчальної дисципліни, які зумовлюють підходи до складання тестових завдань з фізики. Першою особливістю є те, що в більшості розділів фізики (електромагнетизм, оптика, атомна фізика, ядерна фізика, фізика елементарних частинок) вивчаються явища та процеси, що мають не одну природу, а дві або більше, які при цьому, як правило, суперечать одна одній. Це створює зрозумілі труднощі під час складання тестових завдань. Другою особливістю є наявність фізичних явищ (процесів), що виявлені експериментально, але доки не мають строгих теорій. У сучасній фізиці таких ситуацій величезна кількість, тому методика складання тестових завдань з фізики є задачею, надзвичайно актуальною нині. Слід також зазначити, що за останні півтора-два десятиліття фізика помітно зросла за обсягом за рахунок фізики мікросвіту. Відповідно, тестові завдання з фізики повинні, з одного боку, охоплювати дуже великий обсяг навчального матеріалу, з іншого боку, бути конкретними і зрозумілими. Якщо до цього додати описані вище дві особливості, то складання тестів для відповідних розділів фізики становить дуже серйозну проблему. Дана робота представляється кроком при вирішенні цієї проблеми.

Мета статті. Метою роботи є розробка методики складання тестових завдань для діагностики навчальних досягнень студентів з тих розділів фізики, в яких обговорюються явища, що мають як мінімум подвійну природу, наприклад, коли стикаються класична механіка з релятивістською, хвильова теорія з квантовою тощо, а також коли експериментальні факти не мають строгого теоретичного обґрунтування, як, наприклад, природа магнітного поля Землі.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Дослідження в даній роботі здійснюється з використанням таких методів, як аналіз наукової літератури для з'ясування і уточнення поняття педагогічного тесту, визначення мети та функцій тестового контролю, систематизація досліджень щодо принципів складання якісних тестів, узагальнення підходів до визначення ролі освітніх вимірювань у системі забезпечення якості освіти, систематизація існуючих підходів до тестування навчальних досягнень з фізики, узагальнення власного педагогічного досвіду.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ЇХ ОБГОВОРЕННЯ

Складнощі, що виникають як при фізичному описі, так і при складанні тестових завдань, починаються із введення силових полів: електричного, магнітного, електромагнітного, гравітаційного, мезонного тощо. Кожне з цих полів проявляє себе таким чином, що відповідні властивості неможливо описати в рамках одних уявлень (однієї теорії). Якщо як приклад взяти електромагнітне поле, поширення якого породжує електромагнітні хвилі, то інтерференція і дифракція електромагнітних хвиль, що спостерігаються експериментально, свідчать про їх хвильову природу. У той же час, тиск того ж світла на будь-яку перешкоду, що також спостерігається експериментально, свідчить про те, що електромагнітні хвилі одночасно являють собою потік частинок. Отже, двоїста природа тут очевидна. Квант електромагнітного випромінювання називають фотоном. Фотони не мають електричного заряду, не мають маси, існують тільки в русі (фотонів, що перебувають у стані спокою, не існує) – значить вони мають імпульс і, відповідно, симетрію. Залежно від симетрії деякі фотони називають електричними, деякі магнітними. Розглянемо далі гравітаційне поле. У межах класичної фізики гравітаційна взаємодія описується законом Всесвітнього тяжіння Ньютона. Класична теорія гравітації добре працює для опису гравітаційних взаємодій у більшості звичайних ситуацій. Однак вона має свої обмеження і не може пояснити низку фізичних явищ. Зокрема, класична теорія гравітації не може адекватно описувати гравітаційні взаємодії в дуже сильних полях, таких як є поблизу чорних дірок або нейтронних зірок. Не може вона пояснити й такі явища, як гравітаційне линзування, червоне зміщення та уповільнення часу в сильних гравітаційних полях. З цієї причини Альбертом Ейнштейном було розроблено загальну теорію відносності (ЗТВ) - гравітаційну теорію, яка описує гравітацію як прояв геометрії простору-часу, а не як силу. У ЗТВ гравітаційні ефекти зумовлені не силовою взаємодією тіл і полів, а деформацією простору-часу, спричинену присутністю маси-енергії. Існування таких різних підходів класичної (нерелятивістської) та ейнштейнівської (релятивістської) теорій і створює такі труднощі при складанні тестових завдань, які пов'язані з природою гравітації. Нарешті, найбільші труднощі тестування зустрічаються у квантовій фізиці, яка пояснила багато раніше незрозумілих явищ як у фізиці, так і в біології та в медицині. З'явилися такі розділи у науці, як квантова біологія та квантова медицина. І біологія, і медицина у науковому плані вже немислимі без фізико-математичного апарату. Квантова фізика будь-яку взаємодію трактує як процес обміну між елементами, що взаємодіють, деякими частинками, які можуть мати або не мати масу, заряд, механічний спин, магнітний спин тощо. Таких частинок безліч, бо існує безліч різних взаємодій, особливо в мікросвіті - внутрішньоатомні, внутрішньоядерні, внутрішньомезонні тощо. Багато з цих частинок експериментально знайдені, деякі ще ні, але їхня класифікація, властивості, приналежність до різних груп вже є. І все це настільки відрізняється від уявлень класичних термодинаміки та електродинаміки, що складання тестових завдань за цими темами можна назвати фізичним мистецтвом.

Перш, ніж розпочинати міркування про можливості способів складання тестових завдань з перелічених тем, зупинимося коротко на різновидах тих тестових завдань, які в наш час широко використовуються як європейськими, так і вітчизняними педагогами.

Спочатку про прийнятні форми тестових завдань. Педагоги розрізняють закриті тестові завдання (ТЗ) та відкриті ТЗ (Kulishov, 2022; Kukhar et al., 2010; Kyselova et al., 2023; Ishchenko, 2007). До закритих ТЗ відносять:

- Завдання з вибором однієї правильної відповіді. Студенту пропонується вибрати правильний варіант з кількох запропонованих. Це найпоширеніша форма, яка дозволяє швидко дати оцінку.
- Завдання з вибором декількох правильних відповідей. У цьому випадку студент може вибрати кілька правильних відповідей з наданих варіантів. Це дозволяє глибше перевірити розуміння теми.
- Альтернативні завдання, що передбачають 2 відповіді, наприклад, «так» або «ні». Тут дуже високий процент угадування (50 процентів), тому така форма використовується не часто.

До відкритих тестових завдань відносять:

- Завдання, що передбачають вільну відповідь. Студент самостійно формулює відповідь на запитання, що дозволяє оцінити його здатність до критичного мислення та аналізу.
- Завдання на доповнення. Студенту надається частковий текст, який потрібно доповнити. Такі питання найчастіше спрямовані на перевірку знання термінів і понять.
- Завдання на встановлення відповідності, коли елементи однієї множини потрібно поставити у відповідність до елементів іншої множини (зв'язок форми і змісту, суті та явища тощо).
- Завдання на встановлення правильної послідовності. Це складний різновид ТЗ, де студент формує відповідь із запропонованої неврегульованої послідовності слів та інших об'єктів.

Тепер коротко про складність тестових завдань. В більшості випадків викладачі, спираючись на таксономію Б. Блума (Dziuban et al., 2004), виділяють три рівні складності тестових завдань (Kyselova et al., 2023; Kulishov, 2022; Kukhar et al., 2010). Перший рівень - ознайомчий (впізнавання раніше вивчених об'єктів, їх властивостей). Сюди відносяться

завдання для перевірки знання формул, імен, назв, фактів, властивостей, ознак, дій тощо. Другий рівень – репродуктивний (виконання діяльності за інструкцією чи під керівництвом викладача). Сюди відносяться тести-підстановки, в яких є фраза, формула або якийсь інший істотний елемент тексту. До другого рівня складності відносяться також типові задачі. Третій рівень – продуктивний (планування та самостійне виконання діяльності, пов'язаної з виконанням завдання). Тестами третього рівня можуть стати запитання, які цікаві студентам своїми сюжетами, але потребують для відповіді серйозного розуміння відповідних фізичних законів. Прикладами таких запитань можуть бути такі: «навіщо розпушують ґрунт у садах та городах?»; «чому тіла, що вільно падають, відхиляються на схід?»; «чому праві береги рік у північній півкулі крутіші, ніж ліві, а південній півкулі – навпаки» тощо. Безперечною перевагою таких завдань є їх важлива мотивуюча роль, яка спонукає студентів до самостійного набуття знань, формування умінь та навичок мисленнєвої діяльності, уміння самостійно переробляти великі масиви інформації. До третього рівня складності відносяться також нетипові завдання, що вимагають для вирішення дуже глибокого розуміння навчального матеріалу. Хотілося б зазначити, що деякі викладачі переоцінюють внесок форми тестового завдання у його складність. Все ж таки складність тесту визначається насамперед складністю самої фізичної задачі.

Переходячи тепер до основного завдання даної роботи, зауважимо, що наявність кількох теорій для пояснення фізичних процесів та явищ суттєво ускладнює тестування, пов'язане з відповідними процесами та явищами. Насамперед наголосимо, що тестове завдання в даному випадку ніяк не може обійтися одним питанням. Для таких питань, як: «яка природа магнітного поля Землі?», «яка природа гравітаційної взаємодії?», «яка природа взаємодії між нуклонами в ядрах атомів?» слід складати серію запитань. Таких питань у фізиці безліч, але еталонних відповідей такі питання не мають. З іншого боку, обходити контроль знань з усіх цих питань не можна через важливість цих питань. Як же вчинити у цій ситуації? Вище вже було зазначено, що одного питання в тестовому завданні для перевірки знань з будь-якої з цих важливих тем мало. Потрібно по кожній з цих тем складати невелику серію питань у тестовому завданні, розташованих у певній послідовності.

Підкреслимо, що кожна така серія запитань пов'язана не з якимось розділом чи підрозділом фізики, що має місце в більшості випадків, а з конкретним об'єктом (явищем), коли обмежуються одним запитанням. У тих випадках, коли явище не має строгої теорії, але має різні гіпотези, запитання повинні бути за кожною з них. При цьому запитання слід складати таким чином, щоб за відповідями можна було зробити висновки про розуміння студентами переваг та недолік кожної з гіпотез. У тих випадках, коли об'єкт вивчення в одних випадках поводить себе так, що для пояснення його поведінки потрібна одна теорія, а в інших випадках – інші, запитання повинні бути за кожною з теорій і обов'язково за можливості стиккування (співіснування) цих теорій. Наприклад, електромагнітні хвилі мають хвильову і квантову природу (теорію). Можливість одночасного існування цих теорій А. Ейнштейн пояснив перетворенням маси в енергію та навпаки. Далі наведемо два приклади.

Магнітне поле Землі. Існування цього магнітного поля очевидне. Його силові характеристики, індукція та напруженість легко вимірюються у різних точках земної поверхні на доступних глибинах та висотах над землею. На екваторі, наприклад, індукція магнітного поля дорівнює приблизно 0,04 мТл. Існують магнітні аномалії на нашій планеті – Курська та Бразильська магнітні аномалії. Походження магнітного поля Землі в строгому значенні слова досі залишається загадкою для вчених, незважаючи на те, що відомі ті процеси, які вносять поки що невизначені вклади в магнітне поле Землі. З одного боку, внутрішнє ядро Землі має сильне магнітне поле, що створюється рухом розжареного заліза. З іншого боку, зовнішнє (рідке) ядро Землі створює конвекційні потоки, які також породжують дуже сильне магнітне поле зі складною структурою і різними аномаліями. З третього боку, у деяких місцях Землі магнітне поле визначається покладами великих мас магнітних матеріалів. Якщо ще врахувати, що існують гіпотези, які пов'язують походження магнітного поля Землі з атомними процесами в надрах планети, то дати чітку відповідь на питання «яка природа магнітного поля землі?» практично неможливо, незважаючи на те, що можна порівняти ті фізичні процеси, які протікають у всіх випадках. Порівняння це показує, що максимальний внесок у магнітне поле Землі робить обертання рідини в зовнішньому ядрі Землі; другий за величиною внесок вносить обертання внутрішнього ядра Землі (розжареного заліза); далі – вже важко порівнювати. Чисельно оцінити ці вклади поки що неможливо. Водночас важливо зауважити, що магнітне поле Землі захищає нашу планету від сонячної радіації. Без цього захисту життя на Землі було б неможливим.

Тест 1. Природа магнітного поля Землі.

Завдання 1.1. (оцінка за правильну відповідь – 2 бали).

Земля у багатьох місцях містить велику масу магнітних матеріалів. Цей факт є основною причиною існування магнітного поля Землі. Чи є правильною ця точка зору?

Відповіді: «так», «ні». Правильна відповідь: «ні».

Завдання 1.2. (оцінка за правильну відповідь – 2 бали).

Відомо, що на поверхні Землі знаходиться велика кількість електричних зарядів (переважно негативних). При добовому обертанні Землі виникають відповідно кругові електричні струми, що породжують магнітне поле Землі. Чи є правильною ця точка зору?

Відповіді: «так», «ні». Правильна відповідь: «ні».

Завдання 1.3. (оцінка за правильну відповідь – 2 бали).

Магнітне поле Землі генерується переважно внутрішньоземними джерелами. Чи є точка зору правильною?

Відповіді: «так», «ні». Правильна відповідь: «так».

Завдання 1.4. (оцінка за правильну відповідь – 4 бали).

Одним із джерел магнітного поля Землі є внутрішнє ядро Землі. Вказати хоча б приблизно його характеристики: хімічний склад (А), радіус (В), температура (С), тиск (D).

Правильна відповідь: (А) – залізо та нікель; (В) ~ 1200 км; (С) ~ 5700 К; (D) – (330-360) ГПа. (цей тест із відкритими відповідями).

Завдання 1.5. (оцінка за правильну відповідь – 4 бали)

На думку вчених, основним джерелом магнітного поля Землі є зовнішнє рідке ядро Землі. Вказати хоча б приблизно його характеристики: хімічний склад (А), глибина (В), товщина (С), температура (D).

Правильна відповідь: (А) – рідкі залізо та нікель; (В) ~ 2900 км; (С) ~ 2250 км; (D) ~ (4400-6100) К.

Завдання 1.6. (оцінка за правильну відповідь – 5 балів)

У науковій літературі описано кілька теорій походження магнітного поля Землі. Вказати, яку з перелічених вчені вважають основною:

(А) – генерування поля завдяки постійному обертанню металевого ядра планети.

(В) – утворення поля з допомогою тертя між шарами атмосфери, що на різній висоті над поверхнею Землі.

(С) – виникнення поля з допомогою взаємодії Землі з Сонцем.

(D) – виникнення поля з допомогою конвекційних потоків, які створюються зовнішнім (рідким) ядром Землі.

(Е) – утворення поля навколо Землі через велику кількість магнітних матеріалів, що у Землі.

Правильна відповідь: (D).

Завдання 1.7. (оскільки магнітне поле Землі рятує людей від магнітних бур та від смертельної сонячної радіації, то особливо корисним наступне завдання буде для майбутніх медиків та біологів).

Які причини небезпеки магнітних бур для людини найбільш серйозно обговорюються в літературі? Кількість балів за правильну відповідь залежить від факультету та спеціальності.

Вибрати правильні відповіді.

(А) – різке зростання індукції магнітного поля впливає на електромагнітну взаємодію між клітинами організму.

(В) – ритмічні зміни геомагнітного поля відбуваються у діапазоні 0,5 – 2,0 Гц. Саме з такою частотою б'ються серця людей.

(С) – магнітне поле Землі, що різко змінюється при магнітних бурях, і метеопараметри призводять до зменшення кількості еритроцитів і зниження гемоглобіну, тобто зростає в'язкість крові.

(D) – під дією магнітних бур змінюються біоритми, що призводить до погіршення стану людей, які страждають на психічні захворювання.

Правильна відповідь: (В) та (С).

Відповіді на наведені 7 запитань дозволять зробити чіткі висновки про рівень розуміння студентом природи магнітного поля Землі (це і є мета тесту 1).

Наступну тему для складання тестових завдань оберемо з фізики елементарних частинок – одного з найважливіх для студентів розділів фізики. Візьмемо конкретний об'єкт: «Стандартная модель». Стандартная модель – теоретична конструкція в фізиці елементарних частинок, що описує електромагнітні, слабкі та сильні взаємодії всіх елементарних частинок.

Тест 2. Основні характеристики Стандартної моделі.

Завдання 2.1. (оцінка за правильну відповідь – 2 бали).

Чи є хоча б одна з частинок із стандартної моделі одночасно і бозоном, і ферміоном?

Відповіді: «так», «ні».

Правильна відповідь – «ні».

Завдання 2.2. (оцінка за правильну відповідь – 2 бали).

Які частки є переносниками сильної взаємодії між кварками?

Правильна відповідь – «глюони».

Завдання 2.3. (оцінка за правильну відповідь – 2 бали).

Чи може Стандартна модель описати темну матерію?

Відповіді: «так», «ні».

Правильна відповідь – «ні».

Завдання 2.4. (оцінка за правильну відповідь – 4 бали).

Перелічені елементарні частинки розбити на два класи – бозони та ферміони.

1) фотон, 2) електрон, 3) глюон, 4) протон, 5) мезон, 6) нейтрон, 7) нейтрино.

Правильна відповідь:

«бозони: фотон, глюон, мезон;

ферміони: нейтрон, протон, електрон, нейтрино».

Завдання 2.5. (оцінка за правильну відповідь – 4 бали).

Встановіть відповідність між частинками та їх властивостями.

Частинки: а) електрон; б) фотон; в) протон; г) глюон. Властивості: 1) спин 1, бозон; 2) має масу і позитивний заряд; 3) напівцілий спин, ферміон; 4) безмасовий, переносить взаємодії.

Правильна відповідь: а – 3; б – 4; в – 2; г – 1.

Завдання 2.6. (оцінка за правильну відповідь – 5 балів).

Енергія зв'язку ядра атома залежить від:

а) дефекту маси;

б) кількості нуклонів;

в) сильної взаємодії;

г) електронної оболонки.

З перерахованих відповідей вибрати правильні.

Правильна відповідь: всі пункти, окрім останнього.

Останні три запитання, на відміну від перших трьох, вже мають достатньо високий рівень складності.

Завдання 2.7. (оцінка за правильну відповідь – 7 балів).

Що відбувається з хвильовою функцією частки у момент виміру її координати?

- а) вона зникає;
- б) вона стає постійною;
- в) вона колапсує у точку спостереження;
- г) вона перетворюється на нульове значення.

Правильна відповідь: в)

Останнє завдання буде під силу лише найбільш сильним студентам.

Як показав досвід, саме такими тестовими зв'язками зручно перевіряти знання студентів з тих розділів фізики, де важко користуватися інтуїцією, тобто коли немає образних уявлень фізичних процесів. Був час, коли вчені-фізики мали різні точки зору на одні і теж явища, доводячи кожен свою думку. Нарешті, Альберт Ейнштейн запропонував за істину прийняти те, що показують математика та експеримент, навіть якщо це неможливо собі уявити. Експерименти на той час вже показували двоїсту природу електромагнітних хвиль, а математику Альберт Ейнштейн створив, проклавши цим дорогою у фізику мікросвіту. Далі вже були теорії сильної і слабкої взаємодії і так далі.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Фізика, на відміну від інших наук і дисциплін, вивчає явища та процеси, значна частина яких вимагає для опису та розуміння суто абстрактних математичних образів, таких як n -вимірний простір (де $n > 3$), уявний час, відсутність маси та розмірів у частинок і так далі. Цю обставину необхідно враховувати під час складання тестових завдань для перевірки знань у студентів. Зокрема, не потрібно вимагати від студентів образного розуміння деяких явищ, оскільки цих образів немає, а існують рівняння та їх системи. Саме абстрактні математичні образи дозволяють строго визначити такі об'єкти, як атом, електрон, фотон, глюон, протон, простір Мінковського, чорні дірки, темна матерія тощо. Таких об'єктів у природі існує величезна кількість. Саме ці об'єкти та їх сукупності призводять до тих явищ, про які мова йшла вище в аспекті складання тестів для перевірки розуміння цих явищ. Оптимальними є тести, кожен з яких включає до себе запитання за кожним елементом, що утворює явище, яке вивчається, а також за кожним теоретичним підходом, що пояснює це явище. Саме таким чином складені тести дозволяють педагогу визначити рівень розуміння кожним студентом природи дуалізму явищ, а також наявності декількох теоретичних підходів (декількох гіпотез) для пояснення результатів експериментів, пов'язаних з деякими фізичними об'єктами.

Разом з тим, дуже важливо, що аналіз результатів такого тестування дозволяє педагогам аналізувати свої методи викладання фізики і вносити в ці методи позитивні зміни.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори підтверджують відсутність фінансових, особистих чи інших інтересів, що можуть розглядатися як потенційний конфлікт інтересів щодо публікації цієї статті.

ФІНАНСУВАННЯ

Робота виконана за відсутності фінансової підтримки з боку будь-яких організацій.

ДОСТУПНІСТЬ ДАНИХ

Це теоретичне дослідження не передбачає використання додаткових наборів даних.

ВИКОРИСТАННЯ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Інструменти штучного інтелекту не використовувались при написанні цієї роботи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Dziuban, C. D., Hartman, J. L., & Moskal, P. D. (2004). *Blended learning*. Center for Applied Research. Research Bulletin, 7. <https://net.educause.edu/ir/library/pdf/ERB0407.pdf>
2. Адамова, І., & Багрій, К. (2012). Тестування як форма контролю та діагностики знань студентів. *Витоки педагогічної майстерності*, 9, 3–6.
3. Білоусова, Л. І. (2008). Потенціал комп'ютерного тестування. *Вісник ТІМО*, 10, 40–44.
4. Болюбаш, Я. Я., Булах, І. Є., & Мруга, М. Р. (2007). *Педагогічне оцінювання і тестування: Правила, стандарти, відповідальність*. Майстер-клас.
5. Булах, І. Є., & Мруга, М. Р. (2006). *Створюємо якісний тест: навчальний посібник*. Майстер-клас.
6. Іщенко, Т. Д., Ільїн, В. В., Андрущенко, А. М., Ткаченко, О. М., & Рудик, Я. М. (2007). *Методика підготовки та застосування електронних посібників: Методичний посібник для науково-педагогічних працівників, викладачів та студентів аграрних вищих навчальних закладів*. Аграрна освіта.
7. Касперський, А. В., & Кухарчук, Р. П. (2004). Тестові завдання для діагностики рівня вивчення інтегрованих розділів фізики й радіоелектроніки в школі та ВНЗ. *Фізика та астрономія в школі*, 1, 38–41.
8. Касперський, А. В., & Лоха, А. А. (2007). Теоретичні основи тестової діагностики знань з фізики. *Наукові записки. Серія: Педагогічні науки*, 72(1), 1–302.
9. Кисельова, О. І., & Грабовський, О. В. (2023). *Педагогічні вимірювання: навчально-методичний посібник*. Лерадрук.
10. Кулішов, В. С. (2022). *Дидактика вищої школи: навчально-методичний посібник*. БІНПО ДЗВО «УМО» НАПН України.
11. Кухар, Л. О., & Сергієнко, В. П. (2010). *Конструювання тестів: Курс лекцій*. Луцьк.

12. Морзе, Н. В., & Глазунова, О. Г. (б.р.). Моделі ефективного використання інформаційно-комунікаційних та дистанційних технологій навчання у вищому навчальному закладі. *Інформаційні технології і засоби навчання*, (2)(6). [Електронний ресурс].
13. Мороховець, Г. Ю. (2018). Тестування як форма контролю та діагностики знань здобувачів вищої освіти. *Освіта та розвиток обдарованої особистості*, 3(70), 11–15.
14. Подласов, С. О. (2004). Тестування з фізики. *Вісник Чернігівського державного педагогічного університету імені Т. Г. Шевченка. Серія: Педагогічні науки*, 23, 107–111.
15. Ревуцька, Н. М. (2015). Оцінювання якості знань студентів педагогічних спеціальностей засобами тестового контролю. *Електронний інституційний репозиторій КВНЗ КОР «Академія неперервної освіти»*. <https://repository.kristti.com.ua/handle/eiraise/tag/revutska-nataliya-mykolayivna>

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Dziuban, C. D., Hartman, J. L., & Moskal, P. D. (2004). *Blended learning*. Center for Applied Research. Research Bulletin, 7. Retrieved from <https://net.educause.edu/ir/library/pdf/ERB0407.pdf>
2. Adamova, I., & Bahrii, K. (2012). Testuvannya yak forma kontroliu ta diahnostryky znan studentiv [Testing as a form of control and diagnostics of students' knowledge]. *Vytoky pedahohichnoi maisternosti*, 9, 3–6. (in Ukrainian)
3. Bilousova, L. I. (2008). Potensial kompiuternoho testuvannya [Potential of computer testing]. *Visnyk TIMO*, 10, 40–44. (in Ukrainian)
4. Boliubash, Ya. Ya., Bulakh, I. Ye., & Mruha, M. R. (2007). *Pedahohichne otsiniuvannya i testuvannya: Pravyly, standarty, vidpovidalnist* [Pedagogical assessment and testing: Rules, standards, responsibility]. Kyiv: Maister-klas. (in Ukrainian)
5. Bulakh, I. Ye., & Mruha, M. R. (2006). *Stvoriuiemo yakisnyi test: navchalnyi posibnyk* [Creating a quality test: Textbook]. Kyiv: Maister-klas. (in Ukrainian)
6. Ishchenko, T. D., Iljin, V. V., Andriushchenko, A. M., Tkachenko, O. M., & Rudyk, Ya. M. (2007). *Metodyka pidhotovky ta zastosuvannya elektronnykh posibnykiv: Metodychnyi posibnyk* [Methodology of preparation and application of electronic textbooks: Methodical manual]. Kyiv: Ahrarna osvita. (in Ukrainian)
7. Kasperskyi, A. V., & Kukharchuk, R. P. (2004). Testovi zavdannya dlia diahnostryky rivnia vyvchennia intehrovanykh rozdiliv fizyky y radioelektroniky v shkoli ta VNZ [Test tasks for diagnostics of integrated sections of physics and radio electronics in schools and universities]. *Fizyka ta astronomiia v shkoli*, 1, 38–41. (in Ukrainian)
8. Kasperskyi, A. V., & Lokha, A. A. (2007). Teoretychni osnovy testovoi diahnostryky znan z fizyky [Theoretical foundations of test diagnostics of physics knowledge]. *Naukovi zapysky. Seriya: Pedahohichni nauky*, 72(1), 1–302. Kirovohrad. (in Ukrainian)
9. Kyselova, O. I., & Hrabovskiy, O. V. (2023). *Pedahohichni vymiriuvannya: navchalno-metodychnyi posibnyk* [Pedagogical measurements: Educational-methodical manual]. Odesa: Leradruk. (in Ukrainian)
10. Kulishov, V. S. (2022). *Dydaktyka vyshchoi shkoly: navchalno-metodychnyi posibnyk* [Didactics of higher school: Educational-methodical manual]. Bila Tserkva: BINPO DZVO "UMO" NAPS Ukrainy. (in Ukrainian)
11. Kukhar, L. O., & Serhienko, V. P. (2010). *Konstruiuvannya testiv: Kurs lektsii* [Test design: Lecture course]. Lutsk. (in Ukrainian)
12. Morze, N. V., & Hlazonova, O. G. (2008). Modeli efektyvnoho vykorystannya informatsiino-komunikatsiinykh ta dystantsiinykh tekhnolohii navchannia u vyshchomu navchalnomu zakladi [Models of effective use of information-communication and distance learning technologies in higher education]. *Informatsiini tekhnolohii i zasoby navchannia*, 2(6). Retrieved from <https://studbase.kubg.edu.ua/article/395> (in Ukrainian)
13. Morokhovets, H. Yu. (2018). Testuvannya yak forma kontroliu ta diahnostryky znan zdobuvachiv vyshchoi osvity [Testing as a form of control and diagnostics of higher education students' knowledge]. *Osvita ta rozvytok obdarovanoi osobystosti*, 3(70), 11–15. (in Ukrainian)
14. Podlasov, S. O. (2004). Testuvannya z fizyky [Physics testing]. *Visnyk Chernihivskoho derzhavnoho pedahohichnoho universytetu imeni T. H. Shevchenka. Seriya: Pedahohichni nauky*, 23, 107–111. (in Ukrainian)
15. Revutska, N. M. (2015). Otsiniuvannya yakosti znan studentiv pedahohichnykh spetsialnostei zasobamy testovoho kontroliu [Assessing the quality of pedagogical students' knowledge by means of test control]. *Elektronnyi instytutsiinyi repository, KVNZ KOR "Akademiia neperervnoi osvity"*. Retrieved from <https://repository.kristti.com.ua/handle/eiraise/tag/revutska-nataliya-mykolayivna> (in Ukrainian)

| Матеріал надійшов до редакції: 05.09.2025 р. | Прийнято до друку: 19.10.2025 р. | Опубліковано: 28.11.2025 р. |



ВИКОРИСТАННЯ МАТРИЧНОГО ЧИСЛЕННЯ В ЗАДАЧАХ ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИРАЗІВ З ПОХІДНИМИ БАГАТОВИМІРНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Юрій БОХОНОВ ✉

Київський політехнічний інститут
ім. Ігоря Сікорського, Україна
yubochonoff@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-3355-008X>

USING MATRIX CALCULUS IN PROBLEMS OF TRANSFORMING EXPRESSIONS WITH DERIVATIVES OF MULTIDIMENSIONAL MAPPINGS

Yuriy BOKHONOV ✉

Kyiv Polytechnic Institute, Ukraine
yubochonoff@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-3355-008X>

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. В задачах заміни змінних в диференціальних виразах, що містять похідні від багатовимірних відображень пропонується використання глобальних конструкцій, зокрема, матриці Якобі відображення. При цьому досягається формалізація, що допомагає розумінню ідейної сторони проблеми. Пропонована техніка особливо ефективно працює в найбільш складних задачах, коли треба перейти до нових як незалежних змінних, так і залежної.

Матеріали і методи. Для застосування заміни в диференціальних виразах, що містять частинні похідні функцій від багатьох змінних, широко застосовуються матриці Якобі відображень, їхня поведінка при переході до нових змінних, формула диференціювання складеного відображення. При цьому найбільш корисним є використання похідної в позначеннях Лейбніца. Методика суттєво відрізняється від тих, що можна зустріти в численних посібниках. Треба зазначити, що вказана тематика входить, як правило, в програми вищих навчальних закладів з підвищенням рівнем вивчення математичного аналізу.

Результати. Розглянуто задачі, пов'язані з перетвореннями диференціальних виразів, в яких старі змінні виражаються через нові, а також нові змінні – через старі. Приклади охоплюють основні задачі на вказану тему, причому, також і підвищеної складності. Переконливо доведено, що в таких задачах ефективно працює матричне числення, а саме, матриця Якобі диференційовного відображення.

Висновки. Пропонована робота робить наголос на активному використанні матричної техніки в задачах перетворення змінних в диференціальних виразах, зокрема, диференціальних рівняннях першого порядку з багатьма змінними. Таким чином матриця Якобі постає як дійова конструкція, що робить процес перетворень більш зрозумілим і природним. Використання матриці Якобі допомагає студентам краще зрозуміти матеріал, робить розв'язання більш легким. Методика може бути пропонована також у курсах диференціальних рівнянь – звичайних і з частинними похідними.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: матричне числення; багатовимірне відображення; похідна; диференціювання; заміна змінних.

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Бохонов Ю. Використання матричного числення в задачах перетворення виразів з похідними багатовимірних відображень. *Фізико-математична освіта*, 2025. Том 40. № 5. С. 21-28. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i5-03>.

ABSTRACT

Formulation of the Problem. In problems of substitution of variables in differential expressions containing derivatives of multidimensional mappings, the use of global constructions is proposed, in particular, the Jacobi matrix of the mapping. This achieves formalization that helps to understand the conceptual side of the problem. The proposed technique works especially effectively in the most complex problems, when it is necessary to switch to new variables, both independent and dependent.

Materials and Methods. For the application of substitutions in differential expressions containing partial derivatives of functions of many variables, the Jacobi matrix of mappings, its behavior when switching to new variables, and the formula for differentiating a composite mapping are widely used. In this case, the most useful is the use of the derivative in Leibniz notation. The methodology differs significantly from that found in many manuals. It should be noted that this topic is typically included in the programs of higher educational institutions with advanced studies in mathematical analysis.

Results. Problems related to transformations of differential expressions in which old variables are expressed in terms of new ones, and new variables in terms of old ones, are considered. The examples cover the main problems on the specified topic, as well as those of increased complexity. It has been convincingly demonstrated that matrix calculus, specifically the Jacobi matrix of differential mapping, is effective in solving such problems.

Conclusion. The proposed work emphasizes the active use of matrix techniques in problems involving the transformation of variables in differential expressions, particularly first-order differential equations with multiple variables. Thus, the Jacobi matrix proves to be an effective construction, making the transformation process more understandable and transparent. The use of the Jacobi matrix helps students better understand the material, making the solution easier and clearer. The technique can also be introduced in courses on differential equations, including ordinary and partial derivatives.

KEYWORDS: matrix calculus; multidimensional mapping; derivative; differentiation; change of variables.

FOR CITATION: Bokhonov, Yu. (2025). Using matrix calculus in problems of transforming expressions with derivatives of multidimensional mappings. *Physical and Mathematical Education*, 40(5), 21-28. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i5-03>.

ВСТУП

Постановка проблеми. Диференціальне числення функцій багатьох змінних – обов'язкова тема в курсі математичного аналізу. Як правило, основна увага на практичних заняттях приділяється методам знаходження частинних похідних функцій, а сама похідна багатовимірного відображення, яку в даних базисах можна подати як матрицю Якобі, не бере участі у розв'язанні і майже не використовується на практиці. Насправді саме матричний підхід у задачах багатовимірного аналізу, особливо в задачах, в яких треба здійснювати перетворення змінних в диференціальних виразах або в диференціальних рівняннях з частинними похідними першого порядку, значно спрощує розв'язання, робить його природним. При цьому зрозумілою стає ідейна сторона процесу розв'язання.

Аналіз актуальних досліджень. Диференціальному численню багатовимірних відображень присвячена численна математична література, зокрема, І. І. Ляшко, В. Ф. Ємельянов & О. К. Боярчук (1992), Дороговцев А. Я. (1993), Шкіль, М. І. (2005), В. П. Дубовик & І. І. Юрик (2013), О. Forster (2001), Miklós Laczkovich (2017), Shmuel Kantorovitz (2016), Wendell Fleming (2012). Однак, задачі перетворення диференціальних виразів не є розповсюдженими і розглядаються в навчальних закладах з підвищеним рівнем вивчення математичного аналізу. Як правило, методика розв'язання таких задач пов'язана з інваріантністю форми першого диференціала відносно замін змінних. Але при такому підході втрачається розуміння структури – не видно поведінки при перетвореннях похідної, матриці Якобі, як єдиного цілого. Найбільш сучасний погляд на операцію диференціювання полягає в тому, що для функції f , що діє з одного нормованого простору E в інший, F , її похідна в кожній точці – це елемент простору лінійних відображень: $f'(x) \in L(E, F)$ з E в F (J. Dieudonné (1969)). Далі доводиться формула диференціювання композиції функції, яка буде суттєво використовуватись в даній статті. В деяких класичних підручниках про цю конструкцію навіть не згадують, а в інших вона хоч і присутня, але не має подальшого розвитку, не пояснюється, що це може бути застосоване при розв'язанні задач різного ступеня складності, наприклад, при знаходженні похідних складеної функції, при переході у диференціальних виразах та рівняннях з частинними похідними до нових координат, тощо. Автор вважає, що навчання студентів таким конструкціям підвищить їхній теоретичний рівень та зробить розв'язання задач більш зрозумілим.

Будемо реалізовувати описану конструкцію у скінченновимірному випадку. Розглянемо диференційовне відображення $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, y = f(x), x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$. Його похідна – це матриця Якобі, яка в позначенні Лейбніца записується наступним чином:

$$\frac{D(y)}{D(x)} = \frac{D(y_1, \dots, y_m)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Формула диференціювання композиції відображень (складеного відображення): нехай $z = z(y(x)) \in \mathbb{R}^k$. Тоді

$$\frac{D(z_1, \dots, z_k)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \frac{D(z_1, \dots, z_k)}{D(y_1, \dots, y_m)} \frac{D(y_1, \dots, y_m)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial z_1}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial z_k}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial z_k}{\partial y_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Звідси при виконанні умов теореми про диференційовність відображення $x = x(y)$, оберненого до $y = y(x)$, доводиться

справедливість формули: $\frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(y_1, \dots, y_m)} = \left(\frac{D(y_1, \dots, y_m)}{D(x_1, \dots, x_n)} \right)^{-1}$. Підкреслимо, що саме ця формула дуже спростить розв'язання

деяких задач.

Розглянемо одну з найбільш розповсюджених задач. Нехай $u = u(x, y) \in \mathbb{R}$. Записати частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ в

полярних координатах $\frac{\partial u}{\partial \rho}, \frac{\partial u}{\partial \varphi}$, де $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$. Зауважимо, що в цих записах є деяка невідповідність: u є функцією водночас від x, y і ρ, φ . Насправді величина u – це значення двох наступних функцій u і \tilde{u} :

$$u = u(x, y) = u(x(\rho, \varphi), y(\rho, \varphi)) \equiv \tilde{u}(\rho, \varphi).$$

Згідно з відомими формулами диференціювання складеного відображення і оберненого відображення

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \frac{D(u)}{D(x, y)} = \frac{D(u)}{D(\rho, \varphi)} \frac{D(\rho, \varphi)}{D(x, y)} = \frac{D(u)}{D(\rho, \varphi)} \left(\frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} \right)^{-1} = \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}, \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}, \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi & \rho \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}, \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\frac{\sin \varphi}{\rho} & \frac{\cos \varphi}{\rho} \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \cos \varphi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \sin \varphi, \frac{\partial u}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cos \varphi \right).$$

Остаточо,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \cos \varphi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \sin \varphi, \frac{\partial u}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cos \varphi \right) \quad (1)$$

Як правило, при розв'язанні цієї і подібних задач виписують досить громіздку систему лінійних рівнянь відносно шуканих похідних з подальшим їхнім розв'язанням. Автор пропонує не виписувати систему, а використати викладену техніку, яка ідейно замінює розв'язання системи (якщо б ми її виписали) застосуванням оберненої матриці до матриці Якобі перетворення старих (декартових) координат до нових (полярних), що, особливо просто для матриць розмірності 2×2 .

Аналогічно формулі (1) можна одержати для двох неперервно диференційовних функцій $u = u(x, y), v = v(x, y)$ формулу

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \rho} \cos \varphi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \sin \varphi & \frac{\partial u}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cos \varphi \\ \frac{\partial v}{\partial \rho} \cos \varphi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \sin \varphi & \frac{\partial v}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Якщо ці функції задовольняють умовам Коші-Рімана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, то з одержаного результату можна прийти до

умов:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} \cos \varphi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \sin \varphi = \frac{\partial v}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \cos \varphi, \frac{\partial u}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cos \varphi = \frac{\partial v}{\partial \rho} \cos \varphi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \sin \varphi.$$

Виконаємо з цими рівностями два перетворення: спочатку перше помножимо на $-\sin \varphi$, друге – на $\cos \varphi$ і результати додамо; потім перше помножимо на $\cos \varphi$, а друге – на $\sin \varphi$ і теж додамо. Після спрощень отримаємо:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\rho \frac{\partial v}{\partial \rho}.$$

умови Коші-Рімана у полярних координатах, що є важливим фактом у теорії аналітичних функцій.

Метою роботи є застосування матричного числення в задачах заміни змінних в математичних виразах, що містять похідні першого порядку, зокрема, в диференціальних рівняннях першого порядку з частинними похідними.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Дослідження ґрунтується на аналізі програм курсу математичного аналізу для студентів 1-го курсу бакалаврату вищих навчальних закладів технічного спрямування і механіко-математичних факультетів університетів. Наполегливо втілюється методика застосування матриці Якобі диференційовного відображення. Застосовується ідеологія роботи автора – Бохонов, Ю. Є. (2021).

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Підкреслимо: при використанні заміни і подальшому диференціюванні функцій автор наполягає на знаходженні не окремих частинних похідних, а всіх їх в цілому, як елементів відповідних матриць Якобі. Це також привчає студента до того, що вигляд диференціалів, формула диференціювання складеної функції такі самі, як і у одновимірному аналізі, але відповідні вирази мають матричну структуру.

Зауважимо також, що в подібних задачах забороняється розв'язувати нелінійну систему, знаходячи вираз одних координат через інші з метою знаходження матриці Якобі відповідного відображення. З ідейної точки зору розв'язання нелінійної системи важче, ніж розв'язання лінійної задачі, яке в даному випадку замінюється знаходженням оберненої матриці.

Приклад 1. Перейти до полярних координат в системі рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = y + kx(x^2 + y^2), \frac{dy}{dt} = -x + ky(x^2 + y^2).$$

Перетворимо систему, застосовуючи формулу диференціювання складеного відображення і записавши праву частину в полярних координатах:

$$\begin{pmatrix} x'_t \\ y'_t \end{pmatrix} = \frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} \frac{D(\rho, \varphi)}{D(t)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho'_t \\ \varphi'_t \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \sin \varphi + k\rho^2 \cos \varphi \\ -\cos \varphi + k\rho^2 \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\begin{pmatrix} \rho'_t \\ \varphi'_t \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sin \varphi + k\rho^2 \cos \varphi \\ -\cos \varphi + k\rho^2 \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi & \rho \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \varphi + k\rho^2 \cos \varphi \\ -\cos \varphi + k\rho^2 \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\rho^3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -k\rho^3, \frac{d\varphi}{dt} = -1.$$

Приклад 2. Записати у полярних координатах наступне диференціальне рівняння з частинними похідними:

$$y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Розв'язання. Використовуючи формулу (1), підставляючи вирази $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ через $\frac{\partial u}{\partial \rho}, \frac{\partial u}{\partial \varphi}$ в рівняння, одержимо після

перетворень при $\rho \neq 0$: $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$. Його розв'язком буде довільна неперервно диференційовна функція: $z = f(x^2 + y^2)$.

Розглянемо два найбільш загальних випадки, коли відомо про зв'язок між «старою» функцією від двох «старих» змінних і «ною» функції, що залежить від двох «нових» змінних. При цьому в одній ситуації старі змінні виражаються через нові, а в іншій – нові змінні виражаються через старі.

Випадок I. Старі змінні $x, y, z = z(x, y)$ виражаються через нові $u, v, w = w(u, v)$:

$$x = \varphi(u, v, w), y = \psi(u, v, w), z = \chi(u, v, w).$$

В деякому диференціальному виразі від старої невідомої функції $z = z(x, y)$ треба перейти до нової невідомої функції $w = w(u, v)$. Зауважимо, що вираз $\frac{D\chi(u, v, w)}{D(u, v)}$ далі будемо розуміти як похідні по (u, v) функції χ , від яких вона залежить явним чином, не беручи до уваги залежність від цих змінних функції w , тобто, саме частинні похідні, якщо w вважається незалежною змінною. З умови випливає: $z(x, y) = \chi(u, v, w)$. Підставляючи в ліву частину $x = \varphi(u, v, w), y = \psi(u, v, w)$, одержимо тотожність, що суттєво, оскільки саме тотожність можна диференціювати: $z(x, y) = z(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w)) \equiv \chi(u, v, w(u, v))$. Продиференціюємо обидві частини за змінними (u, v) :

$$\frac{D(z)}{D(u, v)} = \frac{D(z)}{D(x, y)} \left(\frac{D(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w))}{D(u, v)} + \frac{D(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w))}{D(w)} \frac{D(w)}{D(u, v)} \right) = \frac{D\chi(u, v, w)}{D(u, v)} + \frac{D\chi(u, v, w)}{D(w)} \frac{D(w)}{D(u, v)}.$$

Звідси

$$\frac{D(z)}{D(x, y)} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \left(\frac{D\chi(u, v, w)}{D(u, v)} + \frac{D\chi(u, v, w)}{D(w)} \frac{D(w)}{D(u, v)} \right) \left(\frac{D(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w))}{D(u, v)} + \frac{D(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w))}{D(w)} \frac{D(w)}{D(u, v)} \right)^{-1}.$$

Запишемо вирази правої частини у більш зручному для обчислень вигляді:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \left(\left(\frac{\partial \chi}{\partial u}, \frac{\partial \chi}{\partial v} \right) + \frac{\partial \chi}{\partial w} \left(\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v} \right) \right) \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial w} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v} \right) \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{\partial \chi}{\partial u} + \frac{\partial \chi}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial \chi}{\partial v} + \frac{\partial \chi}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial v} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (2)$$

Приклад 3. Перетворити диференціальне рівняння з частинними похідними $\left(x \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(y \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = z^2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}$,

увівши заміну: $x = ue^w = \varphi(u, w), y = ve^w = \psi(v, w), z = we^w = \chi(w)$.

Будемо діяти за формулою (2). Обчислимо окремо вирази у правій частині одержаного виразу:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \chi}{\partial u}, \frac{\partial \chi}{\partial v} \right) + \frac{\partial \chi}{\partial w} \left(\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v} \right) &= \left((1+w)e^w \frac{\partial w}{\partial u}, (1+w)e^w \frac{\partial w}{\partial v} \right) = (1+w)e^w \left(\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v} \right). \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial v} \right) &= e^w \begin{pmatrix} 1+u \frac{\partial w}{\partial u} & u \frac{\partial w}{\partial v} \\ v \frac{\partial w}{\partial u} & 1+v \frac{\partial w}{\partial v} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Позначимо визначник одержаної матриці через Δ . Читач самостійно зробить необхідні перетворення і знайде обернену до цієї матриці:

$$\left(= e^w \begin{pmatrix} 1+u \frac{\partial w}{\partial u} & u \frac{\partial w}{\partial v} \\ v \frac{\partial w}{\partial u} & 1+v \frac{\partial w}{\partial v} \end{pmatrix} \right)^{-1} = e^{-w} \begin{pmatrix} 1+v \frac{\partial w}{\partial v} & -u \frac{\partial w}{\partial v} \\ -v \frac{\partial w}{\partial u} & 1+u \frac{\partial w}{\partial u} \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{(1+w)e^w e^{-w}}{\Delta} \left(\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}\right) \begin{pmatrix} 1+v\frac{\partial w}{\partial v} & -u\frac{\partial w}{\partial v} \\ -v\frac{\partial w}{\partial u} & 1+u\frac{\partial w}{\partial u} \end{pmatrix} = \frac{1+w}{\Delta} \left(\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}\right).$$

Звідси

$$x \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{u(1+w)e^w}{\Delta} \frac{\partial w}{\partial u}, \quad y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{v(1+w)e^w}{\Delta} \frac{\partial w}{\partial v}.$$

$$\text{Тоді } \left(x \frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(y \frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{(1+w)^2 e^{2w}}{\Delta^2} \left[\left(u \frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + \left(v \frac{\partial w}{\partial v}\right)^2\right], \quad z^2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = w^2 e^{2w} \frac{(1+w)^2}{\Delta^2} \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial v}.$$

Таким чином рівняння з умови задачі після перетворень запишеться у вигляді, що співпадає (з точністю до позначень змінних) з тим, що фігурує в умові задачі:

$$\left(u \frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + \left(v \frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 = w^2 \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial v},$$

тобто, воно інваріантне відносно вказаної заміни змінних.

Приклад 4. Перетворити диференціальне рівняння з частинними похідними $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = u + \frac{xy}{z}$, увівши заміну: $x = \xi\zeta \equiv \varphi(\xi, \eta, \zeta), y = \eta\zeta \equiv \psi(\xi, \eta, \zeta), z = \zeta \equiv \chi(\xi, \eta, \zeta), u = \zeta w(\xi, \eta, \zeta)$.

Міркуючи, як і при доведенні формули (2), одержимо:

$$\frac{D(\zeta w(\xi, \eta, \zeta))}{D(\xi, \eta, \zeta)} = \frac{D(u)}{D(\xi, \eta, \zeta)} = \frac{D(u)}{D(x, y, z)} \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} \Rightarrow \left(\zeta \frac{\partial w}{\partial \xi}, \zeta \frac{\partial w}{\partial \eta}, w + \zeta \frac{\partial w}{\partial \zeta}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) \begin{pmatrix} \zeta & 0 & \xi \\ 0 & \zeta & \eta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\zeta \frac{\partial w}{\partial \xi}, \zeta \frac{\partial w}{\partial \eta}, w + \zeta \frac{\partial w}{\partial \zeta}\right) = \left(\zeta \frac{\partial u}{\partial x}, \zeta \frac{\partial u}{\partial y}, \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial \eta}, \frac{\partial u}{\partial z} = w - \xi \frac{\partial w}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial w}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial w}{\partial \zeta}.$$

Після підстановки знайдених похідних з урахуванням вигляду перетворень змінних з умови задачі одержимо:

$$(x - z\xi) \frac{\partial w}{\partial \xi} + (y - \eta z) \frac{\partial w}{\partial \eta} + z\zeta \frac{\partial w}{\partial \zeta} + z w = u + \frac{xy}{z} \Rightarrow \zeta^2 \frac{\partial w}{\partial \zeta} + u = u + \xi\eta\zeta \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial \zeta} = \frac{\xi\eta}{\zeta}.$$

Випадок II. Нові змінні $\xi, \eta, \zeta = \zeta(\xi, \eta)$ виражаються через старі $x, y, z = z(x, y)$:

$$\xi = \varphi(x, y, z), \eta = \psi(x, y, z), \zeta = \chi(x, y, z).$$

Запишемо тотожність: $\zeta(\varphi(x, y, z(x, y)), \psi(x, y, z(x, y))) = \chi(x, y, z(x, y))$ і продиференціюємо її за змінними x і y :

$$\frac{D(\zeta)}{D(x, y)} = \frac{D(\zeta)}{D(\xi, \eta)} \left(\frac{D(\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z))}{D(x, y)} + \frac{D(\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z))}{D(z)} \frac{D(z)}{D(x, y)} \right) = \frac{D(\chi(x, y, z))}{D(x, y)} + \frac{D(\chi(x, y, z))}{D(z)} \frac{D(z)}{D(x, y)}.$$

Звідси неважко отримати вираз для частинних похідних старої невідомої функції за старими змінними:

$$\frac{D(z)}{D(x, y)} = \left(\frac{D(\zeta)}{D(\xi, \eta)} \frac{D(\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z))}{D(z)} - \frac{D(\chi(x, y, z))}{D(z)} \right)^{-1} \left(\frac{D(\chi(x, y, z))}{D(x, y)} - \frac{D(\zeta)}{D(\xi, \eta)} \frac{D(\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z))}{D(x, y)} \right)$$

або в координатній формі:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}, \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi(x, y, z)}{\partial z} \end{pmatrix} - \frac{\partial \chi(x, y, z)}{\partial z} \right)^{-1} \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial \chi(x, y, z)}{\partial x}, \frac{\partial \chi(x, y, z)}{\partial y} \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}, \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial x} & \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi(x, y, z)}{\partial x} & \frac{\partial \psi(x, y, z)}{\partial y} \end{pmatrix} \right). \quad (3)$$

Приклад 5. Перетворити диференціальне рівняння з частинними похідними $(xy + z) \frac{\partial z}{\partial x} + (1 - y^2) \frac{\partial z}{\partial y} = x + yz$,

вівши заміну і одержавши рівняння відносно нової функції $\zeta = \zeta(\xi, \eta)$, якщо

$$\xi = \varphi(x, y, z) = yz - x, \eta = \psi(x, y, z) = xz - y, \zeta = \chi(x, y, z) = xy - z.$$

Застосуємо формулу (3):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \left(\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}, \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right) \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} + 1 \right)^{-1} \left((y, x) - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}, \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right) \begin{pmatrix} -1 & z \\ z & -1 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \left(y \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + x \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} + 1 \right)^{-1} \left((y, x) + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} - z \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}, -z \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right) \right) = \left(y \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + x \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} + 1 \right)^{-1} \left(y + \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} - z \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}, x - z \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right). \end{aligned}$$

Підставимо знайдені значення частинних похідних у рівняння:

$$(xy + z) \left(y + \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} - z \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right) + (1 - y^2) \left(x - z \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right) = (x + yz) \left(y \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + x \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} + 1 \right)$$

і після перетворень одержимо: $(1 - x^2 - y^2 - z^2 - 2xyz) \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = 0$. Якщо вираз у дужках не дорівнює нулю, прийдемо до

рівняння $\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = 0$. Його можна розв'язати у неявному вигляді: $\zeta = f(\xi)$, де f – довільна неперервно диференційовна

функція. Повертаючись до старих змінних, будемо мати: $xy - z = f(yz - x)$.

Приклад 6. Перетворити диференціальне рівняння з частинними похідними $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

увівши заміну: $u = \frac{y}{x}, v = z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Розв'язання. Далі ми будемо використовувати наступне значення кореня: $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = v - z$.

Запишемо формулу диференціювання складеного відображення:

$$\begin{aligned} \frac{D(z)}{D(x, y)} &= \frac{D(z)}{D(u, v)} \frac{D(u(x, y, z(x, y)), v(x, y, z(x, y)))}{D(x, y)} = \\ &= \frac{D(z)}{D(u, v)} \left(\frac{D(u(x, y, z), v(x, y, z))}{D(x, y)} + \frac{D(u(x, y, z(x, y)), v(x, y, z(x, y)))}{D(z)} \frac{D(z)}{D(x, y)} \right). \end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{D(z)}{D(u, v)} \frac{D(u(x, y, z(x, y)), v(x, y, z(x, y)))}{D(z)} \right) \frac{D(z)}{D(x, y)} &= \frac{D(z)}{D(u, v)} \frac{D(u(x, y, z), v(x, y, z))}{D(x, y)} \Rightarrow \\ \frac{D(z)}{D(x, y)} &= \left(1 - \frac{D(z)}{D(u, v)} \frac{D(u(x, y, z(x, y)), v(x, y, z(x, y)))}{D(z)} \right)^{-1} \frac{D(z)}{D(u, v)} \frac{D(u(x, y, z), v(x, y, z))}{D(x, y)} \Rightarrow \\ \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \left(1 - \left(\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \right)^{-1} \left(\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \left(1 - \left(\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + \frac{z}{v-z} \end{pmatrix} \right)^{-1} \left(\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ x & y \end{pmatrix} = \\ &= \frac{v-z}{v-z-v \frac{\partial z}{\partial v}} \left(-\frac{y}{x^2} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{x}{v-z} \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{y}{v-z} \frac{\partial z}{\partial v} \right). \end{aligned}$$

Підставляючи знайдені значення у рівняння, одержимо:

$$\frac{v-z}{v-z-v \frac{\partial z}{\partial v}} \left(-\frac{y}{x} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{x^2}{v-z} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{y}{x} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{y^2}{v-z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) = v \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{v-z-v \frac{\partial z}{\partial v}} \frac{\partial z}{\partial v} = v \Rightarrow (x^2 + y^2 + v^2) \frac{\partial z}{\partial v} = v^2 - zv.$$

З умови задачі випливає: $x^2 + y^2 + v^2 = 2(v^2 - zv)$, після чого рівняння набуває вигляду: $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{2}$.

Приклад 7. Перетворити диференціальне рівняння з частинними похідними $(x-z) \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, взявши за залежну змінну x , а y, z – за незалежні змінні.

Розв'язання. Скористаємось формулою (3), ввівши наступні заміни:

$$\xi = \varphi(x, y, z) = z, \eta = \psi(x, y, z) = y, \zeta = \chi(x, y, z) = x:$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} &= \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} - \frac{\partial \chi}{\partial z} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, \frac{\partial x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1, -\frac{\partial x}{\partial y} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Звідси $\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)^{-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial x}{\partial y} \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)^{-1}$. Підстановка одержаних виразів у рівняння після перетворень дає:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{x-z}{y}.$$

ОБГОВОРЕННЯ

Більш традиційною є методика в задачах, де треба переходити від одних координат до інших в диференціальних виразах шляхом запису диференціалів в цих змінних і розв'язанні відповідних систем рівнянь відносно шуканих частинних похідних. Подібний підхід запроваджено у Шкіль, М. І. (2005). Пропонована в даній статті формалізація розв'язує такі проблеми набагато раціональніше, оскільки все впирається в знаходження оберненої матриці Якобі, що особливо у випадку матриці розмірності 2×2 є тривіальною задачею.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Розглянуті приклади свідчать про ефективність і зрозумілість розв'язання досить складних задач диференціального числення функцій багатьох змінних. Особливо хочеться звернути увагу на приклад 7, дослідження якого має психологічні труднощі. Але при застосуванні пропонованого формалізму його розв'язування спрощується. Подальші дослідження можуть бути пов'язані з перетвореннями виразів, що містять похідні вищих порядків. При цьому виникає проблема ідеологічного характеру, зокрема, з інтерпретацією похідної від матриці Якобі, тощо. Згідно з роботою автора, Бохонов, Ю. Є. (2024) вищі похідні можуть бути інтерпретовано у термінах тензорних добутків, що дає змогу працювати з кожною такою похідною як з єдиним цілим.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори підтверджують відсутність фінансових, особистих чи інших інтересів, що можуть розглядатися як потенційний конфлікт інтересів щодо публікації цієї статті.

ФІНАНСУВАННЯ

Робота виконана за відсутності фінансової підтримки з боку будь-яких організацій.

ДОСТУПНІСТЬ ДАНИХ

Це теоретичне дослідження не передбачає використання додаткових наборів даних.

ВИКОРИСТАННЯ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Інструменти штучного інтелекту не використовувались при написанні цієї роботи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бохонов, Ю. Є. (2021). *Математичний аналіз. Частина 2. Диференціальне числення функцій кількох дійсних змінних. Інтеграл, що залежать від параметра: навч. посіб. для студ. спеціальності 122 «Комп'ютерні науки»*. КПІ ім. Ігоря Сікорського. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/56825>
2. Бохонов, Ю. (2024). Застосування тензорної алгебри в диференціальному численні багатовимірних відображень. *Фізико-математична освіта*, 39(3), 24–30. <https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-03>
3. Ляшко, І. І., Ємельянов, В. Ф. & Боярчук О. К. (1992). *Математичний аналіз, частина 1*. Київ: «Вища школа». https://chtyvo.org.ua/authors/Liashko_Ivan/Matematychnyi_analiz_Chastyna_1/
4. Дороговцев, А. Я. (1993). *Математичний аналіз: підручник*. К.: "Либідь". https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Dorogovtsev_P1_1993_320.pdf
5. Шкіль, М. І. (2005). *Математичний аналіз: підручн. у 2-х ч. К.: Вища школа*, https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Shkil_P2_2005_510.pdf
6. Дубовик, В. П. & Юрик, І. І. (2013). *Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак. 4-те вид. К. : Ігнатекс-Україна*. https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/Dubovik_P1_2008_200.pdf
7. Forster, O. (2001). *Analysis 1 – 3 (in German), Vieweg Studium: Grundkurs Mathematik*, Vieweg, Braunschweig.
8. Laczko, M., & T. Sós, V. (2017). *Real Analysis (Vol. 3)*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4939-7369-9>
9. Kantorovitz, S. (2016). *Several Real Variables*. Springer Cham. Springer Cham. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-27956-5>
10. Fleming, W. (1977). *Functions of Several Variables*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9461-7>
11. Dieudonné, J. (1969). *Foundations of Modern Analysis*. Academic Press.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Bokhonov, Yu. Ye. (2021). *Matematychnyi analiz. Chastyna 2. Dyferentsialne chyslennia funktsii kilkokh diisnykh zminnykh. Intehrally, shcho zalezhat vid parametra: navch. posib. dlia stud. spetsialnosti 122 «Komp'uterni nauky»* [Mathematical analysis. Part 2. Differential calculus of functions of several real variables. Integrals depending on the parameter: a textbook for students of specialty 122 "Computer science"]. KPI im. Ihoria Sikorskoho. Kyiv : KPI im. Ihoria Sikorskoho. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/56825> (in Ukrainian).
2. Bokhonov, Yu. (2024). Zastosuvannia tenzornoj algebry v dyferentsialnomu chyslenni bahatovymirnykh vidobrazhen [Application of tensor algebra in the differential calculus of multidimensional mappings]. *Fyzyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, 39(3), 24-30. <https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-03> (in Ukrainian).
3. Liashko, I. I., Yemelianov, V. F. & Boiarchuk O. K. (1992). *Matematychnyi analiz [Mathematical Analysis]*, chastyna 1. Kyiv: «Vyshcha shkola». https://chtyvo.org.ua/authors/Liashko_Ivan/Matematychnyi_analiz_Chastyna_1/ (in Ukrainian).
4. Dorohovtsev, A. Ya. (1993). *Matematychnyi analiz: pidruchnyk [Mathematical Analysis: Textbook]*. K.: "Lybid". https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Dorogovtsev_P1_1993_320.pdf (in Ukrainian).
5. Shkil, M. I. (2005). *Matematychnyi analiz: pidruchn. u 2-eh ch. [Mathematical Analysis: Textbook in 2 parts]*. K.: Vyshcha shkola, https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Shkil_P2_2005_510.pdf (in Ukrainian).
6. Dubovyk, V. P. & Yuryk, I. I. (2013). *Vyshcha matematyka: navch. posib. dlia stud. vyshch. navch. zak. [Higher Mathematics: Textbook for Students of Higher Education]*. 4-te vyd. K. : Ihnateks-Ukraina. https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/Dubovik_P1_2008_200.pdf (in Ukrainian).
7. Forster, O. (2001). Analysis 1 – 3 (in German), *Vieweg Studium: Grundkurs Mathematik*, Vieweg, Braunschweig.
8. Laczovich, M., & T. Sós, V. (2017). *Real Analysis* (Vol. 3). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4939-7369-9>
9. Kantorovitz, S. (2016). *Several Real Variables*. Springer Cham. Springer Cham. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-27956-5>
10. Fleming, W. (1977). *Functions of Several Variables*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9461-7>
11. Dieudonné, J. (1969). *Foundations of Modern Analysis*. Academic Press.

| Матеріал надійшов до редакції: 04.07.2025 р. | Прийнято до друку: 19.09.2025 р. | Опубліковано: 28.11.2025 р. |



ОПТИМІЗАЦІЯ ВІДБОРУ ФАКТОРНИХ ЗМІННИХ У ПРОЦЕСІ ЕКОНОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ: ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

Оксана ГЛУШАК ✉

Київський столичний університет
імені Бориса Грінченка, Україна
o.hlushak@kubg.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0001-9849-1140>

Світлана СЕМЕНЯКА

Київський столичний університет
імені Бориса Грінченка, Україна
s.semeniaka@kubg.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0001-5083-1433>

Надія ЗІНЧЕНКО

Київський столичний університет
імені Бориса Грінченка, Україна
nm.zinchenko@kubg.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0003-1124-4636>

OPTIMIZATION OF FACTOR VARIABLE SELECTION IN ECONOMETRIC MODELING: PRACTICAL RECOMMENDATIONS

Oksana HLUSHAK ✉

Borys Grinchenko Kyiv Metropolitan University, Ukraine
o.hlushak@kubg.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0001-9849-1140>

Svitlana SEMENIACA

Borys Grinchenko Kyiv Metropolitan University, Ukraine
s.semeniaka@kubg.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0001-5083-1433>

Nadiia ZINCHENKO

Borys Grinchenko Kyiv Metropolitan University, Ukraine
nm.zinchenko@kubg.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0003-1124-4636>

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. Правильний відбір факторних змінних у сучасних економетричних дослідженнях є ключовою умовою забезпечення точності, стабільності та прогностичної здатності моделей, проте у студентських роботах часто трапляються типові помилки, пов'язані з надмірною кількістю факторів, слабким теоретичним обґрунтуванням їх вибору або наявністю мультиколінеарності. У статті обґрунтовано необхідність створення практичних рекомендацій, який поєднує наукову обґрунтованість із простотою застосування та забезпечує коректний вибір факторних змінних у процесі моделювання економічних явищ.

Матеріали і методи. У дослідженні використано комплекс теоретичних, статистичних та економетричних методів, серед яких ключову роль відіграли кореляційний і регресійний аналіз, що дали змогу виявити та кількісно оцінити взаємозв'язки між змінними. Для підвищення достовірності результатів і стабільності моделі проведено перевірку на мультиколінеарність за алгоритмом Фаррара–Глобера, який передбачає застосування χ^2 -, F- та t-критеріїв для оцінки взаємозалежностей між незалежними змінними.

Результати. У результаті дослідження запропоновано поетапний алгоритм відбору факторних змінних, що передбачає: (1) розрахунок коефіцієнтів кореляції для формування вектора та матриці кореляцій; (2) відбір змінних, які мають сильний зв'язок із результативною змінною та слабку взаємну кореляцію; (3) перевірку інформативності змінних за допомогою методу показників інформаційної місткості та коефіцієнта множинної кореляції; (4) додатковий аналіз на мультиколінеарність для виявлення надлишкових факторів. Алгоритм забезпечує обґрунтованість вибору предикторів, підвищує точність і стабільність моделей, а також є зручним для навчального використання.

Висновки. Запропонований підхід дозволяє системно організувати процес відбору факторних змінних у студентських економетричних дослідженнях, поєднуючи наочність, доступність та наукову коректність. Його застосування сприяє формуванню у студентів навичок аналітичного мислення, статистичної інтерпретації результатів та усвідомленого підходу до побудови моделей.

ABSTRACT

Formulation of the problem. The correct selection of factor variables in modern econometric studies is a key condition for ensuring the accuracy, stability, and predictive power of models. However, student papers often contain typical errors related to an excessive number of factors, weak theoretical justification for their selection, or the presence of multicollinearity. The article substantiates the need to create practical recommendations that combines scientific validity with ease of use and ensures the correct selection of factor variables in the process of modeling economic phenomena.

Materials and methods. The study uses a set of theoretical, statistical, and econometric methods, among which correlation and regression analysis played a key role, allowing us to identify and quantitatively assess the relationships between variables. To increase the reliability of the results and the stability of the model, a multicollinearity check was performed using the Farrar–Glauber algorithm, which involves the use of χ^2 , F, and t criteria to assess the interdependencies between independent variables.

Results. As a result of the study, a step-by-step algorithm for selecting factor variables is proposed, which involves: (1) calculating correlation coefficients to form a vector and correlation matrix; (2) selecting variables that have a strong relationship with the outcome variable and weak mutual correlation; (3) verification of the informativeness of variables using the method of information capacity indicators and the multiple correlation coefficient; (4) additional analysis for multicollinearity to identify redundant factors. The algorithm ensures the validity of the predictor choice, enhances the accuracy and stability of models, and is convenient for educational purposes.

Conclusion. The proposed approach enables the systematic organization of the process of selecting factor variables in student econometric research, combining clarity, accessibility, and scientific rigor. Its application contributes to the formation of students' analytical thinking skills, statistical interpretation of results, and a conscious approach to model building.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: економетричне моделювання; факторні змінні; відбір факторів; мультиколінеарність; кореляційний аналіз.

KEYWORDS: econometric modeling; factor variables; factor selection; multicollinearity; correlation analysis.

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Глушак О., Семеняка С., Зінченко Н. Оптимізація відбору факторних змінних у процесі економетричного моделювання: практичні рекомендації. *Фізико-математична освіта*, 2025. Том 40. № 5. С. 29-35. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i5-04>.

FOR CITATION: Hlushak, O., Semeniaka, S., & Zinchenko, N. (2025). Optimization of factor variable selection in econometric modeling: practical recommendations. *Physical and Mathematical Education*, 40(5), 29-35. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i5-04>.

ВСТУП

Постановка проблеми. Сучасна підготовка економістів, фінансистів і менеджерів передбачає формування у студентів здатності здійснювати ґрунтовний кількісний аналіз соціально-економічних процесів на основі економетричних методів (Глушак & Семеняка, 2017; Глушак та ін., 2018). Ефективність таких досліджень значною мірою залежить від коректного відбору факторних змінних, які визначають структуру та пояснювальну силу побудованої моделі. Неправильний вибір факторів, що часто трапляється у студентських роботах, зумовлює низьку якість економетричних моделей, викривлення результатів і помилкові управлінські висновки. Типовими проблемами є надмірне включення змінних без економічного обґрунтування, ігнорування взаємозалежності між ними, а також наявність мультиколінеарності, яка порушує статистичну надійність оцінених параметрів.

Аналіз актуальних досліджень. Відбір факторних змінних є одним із ключових етапів побудови економетричних моделей, оскільки саме він визначає точність, інтерпретованість і прогностичну здатність отриманих результатів. У сучасних дослідженнях запропоновано широкий спектр методів відбору факторів, які можна класифікувати як класичні (Hall & Miller, 2009), регуляризаційні (Turlach et al., 2005), байєсівські (García-Donato & Paulo, 2021) та спеціалізовані, орієнтовані на особливості факторного аналізу (Abramov et al., 2021; Obushnyi et al., 2022; Virovets et al., 2023).

У праці Kuo & Mallick (1998) представлено узагальнений підхід до відбору факторних змінних у регресійних моделях, що поєднує елементи класичних і байєсівських методів. Автори запропонували просту процедуру підмножинного відбору незалежних змінних, яка базується на розширенні стандартного рівняння регресії шляхом введення індикаторних змінних. Ці змінні визначають, які фактори мають бути включені до моделі. У роботі розглянуто традиційні методи – покрокову регресію, послідовне виключення та додавання змінних, засновані на мінімізації середньоквадратичної помилки. Також проведено порівняння з байєсівськими підходами, зокрема з використанням байєсівського та псевдо-байєсівського факторів для вибору найкращої моделі.

Подальший розвиток цієї проблематики представлено у дослідженні Desboulets (2018), де здійснено ґрунтовний огляд сучасних процедур відбору факторних змінних з позицій практичного застосування. Автор наголошує, що зростання обсягів даних сприяло поширенню автоматизованих методів моделювання, які дають змогу формувати моделі без попередніх теоретичних обмежень. Незважаючи на активний розвиток теоретичних аспектів, у більшості прикладних робіт, як зазначає Desboulets, досі широко використовуються базові процедури – передусім покрокова регресія. Дослідник запропонував класифікацію методів залежно від типу моделей (лінійні, групові, адитивні, частково лінійні, непараметричні) та розглянув доступні програмні засоби, що забезпечують їх реалізацію. Крім того, автор навіть рекомендує щодо вибору методів для різних цілей моделювання та запропонував підходи до підвищення точності й стабільності процесу відбору факторів.

Інший напрям розвитку цієї тематики представлено в роботі Fan et al. (2018), де розглянуто проблему відбору змінних у високимірних регресійних задачах за умов наявності просторової та часової залежності між даними. Автори підкреслюють, що більшість поширених методів втрачають ефективність у разі сильної кореляції між факторами. Для розв'язання цієї проблеми вони запропонували метод Factor-Adjusted Regularized Model Selection (FarmSelect), який використовує факторну модель для виділення прихованих (латентних) факторів і індивідуальних компонент змінних. Це дає змогу зменшити взаємну залежність між ознаками та підвищити якість відбору змінних. Доведено, що метод FarmSelect забезпечує узгодженість відбору моделі та оптимальні швидкості збіжності навіть за слабких статистичних умов. Результати чисельних експериментів показують, що запропонований підхід є ефективним як у межах вибірки, так і при прогнозуванні на нових даних, забезпечуючи стабільність навіть за слабкої або відсутньої кореляції між змінними.

Окрему увагу питанню відбору факторних змінних приділено у дослідженні Kvalheim (2020). У роботі порівнюються два показники – вектор та матриця коефіцієнтів кореляції – для ранжування змінних за їхнім внеском у латентно-змінні регресійні моделі, побудовані на основі методу часткових найменших квадратів. Обидва показники базуються на проекції матриці пояснювальних змінних на нормалізований вектор регресії.

Подальший розвиток досліджень у напрямі відбору факторних змінних демонструє зростаючий інтерес до методів, що ґрунтуються на аналізі кореляційних зв'язків між змінними. Зокрема, у роботі Dudáš et al. (2025) було представлено новий підхід до «очищення» кореляційної матриці шляхом застосування нечітких масок (fuzzy masks). Такий підхід дозволяє не лише виділяти пари змінних із високим рівнем взаємозв'язку, але й зберігати поступовість переходу між «значущими» та «незначущими» коефіцієнтами кореляції. Це відкриває нові можливості для точнішої побудови множини факторів, що мають найвищий прогностичний потенціал.

У контексті навчального процесу результати подібних досліджень доцільно використовувати для формування у студентів практичних навичок застосування методів відбору факторних змінних, які спираються на аналіз вектора та матриці коефіцієнтів кореляції. Зокрема, варто приділити увагу методу показників інформаційної місткості, який дозволяє оцінити внесок кожної змінної у загальну варіацію досліджуваного процесу, а також методу коефіцієнта множинної кореляції, що дає змогу визначити ступінь лінійного зв'язку між кожною потенційною факторною змінною та результативною ознакою в умовах багатовимірної залежності.

Опанування цих методів сприятиме розвитку у студентів здатності:

- інтерпретувати структуру взаємозв'язків між змінними;
- здійснювати вибір найбільш інформативних факторів на основі кількісних показників;
- критично оцінювати кореляційну надлишковість у даних і запобігати мультиколінеарності.

Поєднання сучасних підходів, описаних у дослідженнях Fan et al. (2018), Kvalheim (2020) та Dudáš et al. (2025), із базовими методами кореляційного аналізу, створює комплексну методологічну основу для навчання майбутніх економістів, фінансистів і менеджерів методам раціонального відбору факторних змінних у економетричних моделях.

Мета статті полягає у формулюванні практичних рекомендацій для студентів щодо раціонального відбору факторних змінних у процесі побудови економетричних моделей, спрямованих на підвищення достовірності результатів аналізу та якості економічних інтерпретацій.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У дослідженні використано комплекс теоретичних, статистичних та економетричних методів, спрямованих на обґрунтування, порівняння та оцінку ефективності підходів до відбору факторних змінних у регресійних моделях. Теоретичну основу становили аналіз, синтез і порівняльний аналіз, які дали змогу систематизувати сучасні підходи до відбору змінних та узагальнити результати, подані у працях: Abramov et al. (2021), Desboulets (2018), Dudáš (2025), Fan et al. (2018), García-Donato & Paulo (2021), Hall & Miller (2009), Kuo & Mallick (1998), Kvalheim (2020), Obushnyi et al. (2021), Turlach et al. (2005), Virovets et al. (2023). Для кількісного аналізу застосовано методи кореляційного та регресійного аналізу, зокрема побудову вектора та матриці коефіцієнтів кореляції, а також метод показників інформаційної місткості, що дає змогу визначити внесок кожного предиктора у варіацію результативної ознаки. Застосовані статистичні χ^2 -, F- та t-критерії для оцінки взаємозалежностей між незалежними змінними в алгоритмі дослідження на мультиколінеарність (Глушак & Семеняка, 2018).

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Результати проведеного дослідження дали змогу розробити практичні рекомендації, які представлені у вигляді алгоритму для студентів щодо відбору факторних змінних у процесі побудови економіко-математичних моделей. Відібрані факторні змінні, які входять до досліджуваної моделі, мають задовольняти ряду ознак, а саме: мати високу варіабельність, сильно корелювати з результативною змінною, слабо корелювати між собою, а також сильно корелювати зі змінними, які не використовуються в моделі як факторні, але пов'язані з результативною змінною. Алгоритм відбору факторів передбачає кілька етапів. На початку здійснюється розрахунок коефіцієнтів кореляції, що дозволяє побудувати вектор або матрицю кореляційних зв'язків між змінними. Потім відбувається вибір тих змінних, які мають високу кореляцію з результативною змінною та низьку взаємну кореляцію між собою. Далі проводиться перевірка адекватності вибору факторів із використанням методу показників інформаційної місткості та методу коефіцієнта множинної кореляції. Для підвищення достовірності результатів здійснюється також додатковий аналіз на мультиколінеарність, що дозволяє виявити надлишкові або тісно пов'язані змінні. Перевагами запропонованого алгоритму є його простота, наочність та швидкість застосування для невеликих наборів даних, що робить його зручним для навчальних цілей і практичних завдань студентів. Водночас обмеженням є те, що цей підхід не враховує нелінійні зв'язки між змінними й може бути недостатньо ефективним при наявності високої мультиколінеарності чи великої кількості потенційних факторів.

Розглянемо докладніше алгоритм відбору факторних змінних (Рис.1), що входять до складу економетричної моделі. Дана процедура складається з наступних кроків:

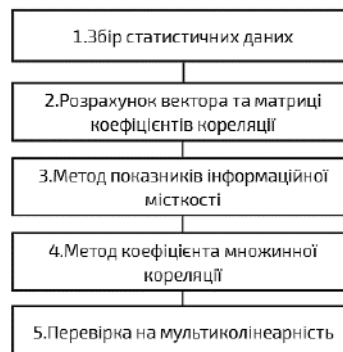


Рис. 1. Алгоритм відбору факторних змінних

Джерело: розроблено авторами

1. Збір статистичних даних про реалізацію результативної змінної U та факторних змінних X_j ($j = \overline{1, n}$). Отримані статистичні дані y_j та x_{ij} ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$). На цьому кроці систематизують та записують дані у вигляді таблиці або вектора спостереження залежної змінної U і матриці спостереження незалежних змінних X_1, X_2, \dots, X_n :

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}.$$

2. Наступним етапом дослідження виступає аналіз щільності взаємозв'язків між результативною ознакою та відібраними факторними змінними, а також між самими факторами, що включені до моделі. Така перевірка дозволяє

оцінити ступінь відповідності факторів основним вимогам, зокрема другій та третій ознакам, яким мають задовольняти обрані змінні, – наявності тісного зв'язку з результативною змінною та слабкої кореляції між собою. Для кількісного вимірювання сили цих зв'язків застосовується розрахунок коефіцієнтів кореляції, що дозволяє виявити ступінь взаємозалежності показників і забезпечити коректність подальшого моделювання.

Для визначення сили зв'язку обчислюємо коефіцієнти кореляції за формулами:

$$r_j = \frac{\overline{x_j y} - \bar{x}_j \cdot \bar{y}}{\sqrt{y^2 - (\bar{y})^2} \cdot \sqrt{x_j^2 - (\bar{x}_j)^2}} \text{ та } r_{kj} = \frac{\overline{x_k x_j} - \bar{x}_k \cdot \bar{x}_j}{\sqrt{x_k^2 - (\bar{x}_k)^2} \cdot \sqrt{x_j^2 - (\bar{x}_j)^2}}, \text{ де } k = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$$

Перша формула дозволяє визначити силу зв'язку між відповідними факторними та результативною змінними, а друга – між потенційними факторними змінними. Результати, отримані після використання першої та другої формул, можна записати відповідно у вигляді вектора кореляції R_0 та матриці кореляції R :

$$R_0 = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Метою цього етапу дослідження є відбір таких факторних змінних, які характеризуються високим рівнем кореляції із залежною змінною та водночас низьким ступенем взаємної кореляції факторів між собою. Для оцінювання статистичної значущості отриманих коефіцієнтів кореляції застосовується критерій Стюдента: розраховані значення порівнюються з критичним значенням коефіцієнта кореляції, визначеним на основі t-розподілу Стюдента для заданого рівня значущості α і $n - 2$ ступенів вільності (в даному випадку n – це обсяг відповідної вибірки). Такий підхід дає змогу обґрунтовано виокремити найбільш інформативні фактори для подальшого включення до моделі.

$$r_{\text{крит}} = \sqrt{\frac{t_{\text{табл}}^2}{t_{\text{табл}}^2 + n - 2}}, \text{ де } t_{\text{табл}} = t\left(\frac{\alpha}{2}; n - 2\right).$$

У разі, якщо потенційні факторні змінні не проходять перевірку за критерієм $r_{kj} < r_{\text{крит}}$, вони вилучаються з подальшого аналізу. Серед змінних, що залишилися, обирається та, яка має найбільший коефіцієнт кореляції з результативною змінною, оскільки саме вона містить найбільший обсяг інформації про поведінку залежної змінної. Далі здійснюється аналіз кореляційних зв'язків між вибраною факторною змінною та іншими змінними, що залишилися у моделі. Із розгляду виключаються ті змінні, для яких виконується умова $r_{kj} > r_{\text{крит}}$, оскільки вони дублюють інформацію, вже відображену вибраною змінною. Такий підхід дозволяє мінімізувати мультиколінеарність і забезпечити включення до моделі лише найбільш інформативних факторів.

3. *Метод показників інформаційної місткості* є одним із ефективних підходів до відбору факторних змінних у процесі побудови економетричних моделей. Його суть полягає у виборі тих змінних, які демонструють високий рівень кореляції з результативною змінною та водночас характеризуються низьким ступенем взаємної кореляції між собою. Такий підхід дає змогу уникнути дублювання інформації та підвищити точність моделі. Початковими даними для реалізації методу виступають вектор кореляцій результативної змінної з факторними R_0 та матриця парних кореляцій між самими факторними змінними R . Саме на основі цих статистичних показників здійснюється оцінювання інформаційної місткості кожної змінної та формування оптимального набору факторів для побудови моделі.

Суть даного методу полягає в наступному: розглядають усі комбінації потенційних факторних змінних X_1, X_2, \dots, X_n . Загальна кількість таких комбінацій $C = 2^n - 1$. Для кожної з таких комбінацій розраховують *індивідуальні* та *інтегральні* показники інформаційної місткості.

Індивідуальні показники інформаційної місткості для кожної конкретної ситуації визначаються за формулою

$$h_{cj} = \frac{r_j^2}{1 + \sum_{i=1, i \neq j}^{n_c} |r_{ji}|},$$

де c – номер комбінації ($c = \overline{1, C}$), j – номер факторної змінної, що входить в дану комбінацію та індивідуальний показник якої знаходимо ($j = \overline{1, n}$), n_c – кількість змінних в певній комбінації, r_{ji} – коефіцієнт кореляції між факторними змінними X_j та X_i , r_j – коефіцієнт кореляції між факторною змінною X_j та результативною змінною. Інтегральні

показники інформаційної місткості обчислюються за формулою $H_c = \sum_{j=1}^{n_c} h_{cj}$.

Індивідуальні та інтегральні показники інформаційної місткості нормуються в межах інтервалу $[0; 1]$, що забезпечує можливість їх порівняння між собою. Чим ближче значення цих показників до одиниці, тим вищою є інформативність відповідних факторних змінних. У випадку, коли факторні змінні демонструють сильний кореляційний зв'язок із результативною змінною та водночас характеризуються слабкими взаємними кореляціями, індивідуальні та інтегральні показники інформаційної місткості наближаються до своїх максимальних значень. Відповідно, для включення до моделі обираються ті змінні, які мають найбільші значення інтегрального показника інформаційної місткості, оскільки

саме вони забезпечують найповніше відображення інформації про результативну ознаку при мінімальній надлишковості даних.

4. Наступний метод відбору факторних змінних ґрунтується на використанні коефіцієнта множинної кореляції. Коефіцієнт множинної кореляції може бути критерієм відбору найкращої комбінації факторних змінних серед комбінацій, що містять *однакову* кількість факторів.

Даний коефіцієнт є мірою лінійного зв'язку результативної змінної Y з факторними змінними X_1, X_2, \dots, X_n . Очевидно, максимальне значення коефіцієнта відповідає найбільшій щільності зв'язку. Позначається коефіцієнт множинної кореляції R_c і задається на інтервалі $[0; 1]$.

Якщо до комбінації факторних змінних входять *всі* факторні змінні, то коефіцієнт множинної кореляції можна визначити за допомогою вектора кореляції R_0 та матриці кореляції R за відповідною загальною формулою:

$$R_c = \sqrt{1 - \frac{\det W}{\det R}}, \text{ де } W = \begin{pmatrix} 1 & R_0^T \\ R_0 & R \end{pmatrix}$$

5. Наступним кроком для підвищення достовірності отриманих результатів після первинного відбору факторних змінних доцільно провести додатковий аналіз на мультиколінеарність. Такий аналіз спрямований на виявлення надлишкових або тісно взаємопов'язаних змінних, які можуть спотворювати результати оцінювання параметрів моделі та знижувати її пояснювальну здатність. Мультиколінеарність виникає тоді, коли дві або більше незалежних змінних мають високий рівень взаємної кореляції, унаслідок чого їхній внесок у пояснення варіації результативної змінної стає неоднозначним. Для виявлення цього явища застосовують алгоритм Фаррара — Глобера, який включає три види статистичних критеріїв, за якими перевіряється мультиколінеарність усього масиву незалежних змінних (χ^2 -критерій); кожної незалежної змінної з усіма іншими (F-критерій); кожної пари незалежних змінних (t-критерій). Та складається з семи кроків: нормалізація змінних; знаходження кореляційної матриці; визначення критерію χ^2 ; визначення оберненої матриці; обчислення F-критеріїв; знаходження частинних коефіцієнтів кореляції; обчислення t-критеріїв (Глушак & Семеняка, 2018). Проведення такого аналізу дозволяє забезпечити стабільність параметрів регресійної моделі, підвищити точність прогнозування та уникнути дублювання інформації між факторами.

ОБГОВОРЕННЯ

Під час виконання студентських економетричних досліджень без застосування запропонованого алгоритму найчастіше спостерігаються типові помилки, пов'язані з некоректним урахуванням взаємозв'язків між факторними змінними. Зокрема, студенти часто не аналізують щільність кореляційних зв'язків між факторами, що призводить до появи мультиколінеарності в моделі. Унаслідок цього оцінки параметрів регресійного рівняння стають статистично незначущими, а точність прогнозування суттєво знижується. Використання запропонованого алгоритму дає змогу своєчасно виявити такі взаємозалежності, оптимізувати набір факторів і підвищити достовірність отриманих результатів.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Проведене дослідження дозволило сформулювати системний підхід до відбору факторних змінних у студентських економетричних дослідженнях, що поєднує сучасні теоретичні напрацювання та практичні рекомендації для навчального застосування. Обґрунтовано важливість правильного вибору факторів як ключової умови побудови достовірних, інтерпретованих і прогностично ефективних економетричних моделей. На основі аналізу сучасних наукових праць встановлено, що актуальні підходи до відбору факторних змінних еволюціонують від класичних методів до інтегрованих моделей, які враховують високу вимірність даних, латентні фактори та складні кореляційні залежності.

Запропонований алгоритм забезпечує послідовність дій при формуванні системи факторів, зокрема обчислення коефіцієнтів кореляції, визначення найбільш інформативних змінних за методами показників інформаційної місткості та коефіцієнта множинної кореляції, а також перевірку моделі на наявність мультиколінеарності. Такий підхід дозволяє студентам усвідомлено та обґрунтовано здійснювати вибір змінних, підвищуючи якість побудованих моделей.

Практичне значення одержаних результатів полягає у можливості використання розробленого алгоритму як навчально-методичного інструменту під час виконання кваліфікаційних робіт з економетричного моделювання. Застосування запропонованих методів сприяє розвитку в студентів навичок аналітичного мислення, статистичного моделювання та інтерпретації даних.

Перспективи подальших досліджень полягають у розширенні методологічної бази за рахунок врахування нелінійних залежностей між змінними, а також у розробленні алгоритмів для роботи з великими даними. Такий напрям забезпечить поглиблення теоретичних засад і підвищить практичну ефективність економетричних досліджень у підготовці майбутніх економістів, фінансистів і менеджерів.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори підтверджують відсутність фінансових, особистих чи інших інтересів, що можуть розглядатися як потенційний конфлікт інтересів щодо публікації цієї статті.

ФІНАНСУВАННЯ

Робота виконана за відсутності фінансової підтримки з боку будь-яких організацій.

ДОСТУПНІСТЬ ДАНИХ

Це теоретичне дослідження не передбачає використання додаткових наборів даних.

ВИКОРИСТАННЯ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Інструменти штучного інтелекту не використовувались при написанні цієї роботи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Abramov, V., Astafieva, M., Boiko, M., Bodnenko, D., Bushma, A., Vember, V., Hlushak, O., Zhylytsov, O., Ilich, L., Kobets, N., Kovaliuk, T., Kuchakovska, H., Lytvyn, O., Lytvyn, P., Mashkina, I., Morze, N., Nosenko, T., Proshkin, V., Radchenko, S., & Yaskevych, V. (2021). *Theoretical and practical aspects of the use of mathematical methods and information technology in education and science*. <https://doi.org/10.28925/9720213284km>
2. Dudáš, A., Michalíková, A., & Jašek, R. (2025). Fuzzy masks for correlation matrix pruning. *IEEE Access*, 13, 35387–35400. <https://doi.org/10.1109/access.2025.3544027>
3. Desboulets, L. (2018). A review of variable selection in regression analysis. *Econometrics*, 6(4). <https://doi.org/10.3390/econometrics6040045>
4. Fan, J., Ke, Y., & Wang, K. (2018). Factor-adjusted regularized model selection. *Econometrics: Econometric Model Construction*. <https://doi.org/10.2139/ssrn.3248047>
5. García-Donato, G., & Paulo, R. (2021). Variable selection in the presence of factors: A model selection perspective. *Journal of the American Statistical Association*, 117(540), 1847–1857. <https://doi.org/10.1080/01621459.2021.1889565>
6. Hall, P., & Miller, H. (2009). Using generalized correlation to effect variable selection in very high dimensional problems. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 18(3), 533–550. <https://doi.org/10.1198/jcgs.2009.08041>
7. Kuo, L., & Mallick, B. (1998). Variable selection for regression models. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series B*, 60(1), 65–81.
8. Kvalheim, O. (2020). Variable importance: Comparison of selectivity ratio and significance multivariate correlation for interpretation of latent-variable regression models. *Journal of Chemometrics*, 34(9). <https://doi.org/10.1002/cem.3211>
9. Obushnyi, S., et al. (2021). Ensuring data security in the peer-to-peer economic system of the DAO. In *Cybersecurity Providing in Information and Telecommunication Systems II* (Vol. 3187, pp. 284–292).
10. Obushnyi, S., et al. (2022). Autonomy of economic agents in peer-to-peer systems. In *Cybersecurity Providing in Information and Telecommunication Systems* (Vol. 3288, pp. 125–133).
11. Turlach, B., Venables, W., & Wright, S. (2005). Simultaneous variable selection. *Technometrics*, 47(3), 349–363. <https://doi.org/10.1198/004017005000000139>
12. Virovets, D., et al. (2023). Ways of interaction of autonomous economic agents in decentralized autonomous organizations. In *Cybersecurity Providing in Information and Telecommunication Systems* (Vol. 3421, pp. 182–190).
13. Глушак, О. М., & Семеняка, С. О. (2017). Економіко-математичне моделювання – перспективний напрямок прикладної математики. *Фізико-математична освіта*, 1(11), 28–31. http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/journals/2017-v1-11/2017_1-11-GlushakSemenyaka_Scientific_journal_FMO.pdf
14. Глушак, О. М., & Семеняка, С. О. (2018). Передумови побудови багатофакторної економетричної моделі: дослідження на мультиколінеарність. *Фізико-математична освіта*, 1(15), 171-175. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2018-015-1-031>
15. Глушак, О. М., Бодненко, Д., & Семеняка, С. О. (2018). Формування інформатичної компетентності майбутніх фінансистів під час вивчення дисципліни «Економетрика». *Освітологічний дискурс*, 1–2(20–21), 325–340. <http://od.kubg.edu.ua/index.php/journal/article/view/492>

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Abramov, V., Astafieva, M., Boiko, M., Bodnenko, D., Bushma, A., Vember, V., Hlushak, O., Zhylytsov, O., Ilich, L., Kobets, N., Kovaliuk, T., Kuchakovska, H., Lytvyn, O., Lytvyn, P., Mashkina, I., Morze, N., Nosenko, T., Proshkin, V., Radchenko, S., & Yaskevych, V. (2021). *Theoretical and practical aspects of the use of mathematical methods and information technology in education and science*. <https://doi.org/10.28925/9720213284km>
2. Dudáš, A., Michalíková, A., & Jašek, R. (2025). Fuzzy masks for correlation matrix pruning. *IEEE Access*, 13, 35387–35400. <https://doi.org/10.1109/access.2025.3544027>
3. Desboulets, L. (2018). A review on variable selection in regression analysis. *Econometrics*, 6(4). <https://doi.org/10.3390/econometrics6040045>
4. Fan, J., Ke, Y., & Wang, K. (2018). Factor-adjusted regularized model selection. *Econometrics: Econometric Model Construction*. <https://doi.org/10.2139/ssrn.3248047>
5. García-Donato, G., & Paulo, R. (2021). Variable selection in the presence of factors: A model selection perspective. *Journal of the American Statistical Association*, 117(540), 1847–1857. <https://doi.org/10.1080/01621459.2021.1889565>
6. Hall, P., & Miller, H. (2009). Using generalized correlation to effect variable selection in very high dimensional problems. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 18(3), 533–550. <https://doi.org/10.1198/jcgs.2009.08041>
7. Kuo, L., & Mallick, B. (1998). Variable selection for regression models. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series B*, 60(1), 65–81.
8. Kvalheim, O. (2020). Variable importance: Comparison of selectivity ratio and significance multivariate correlation for interpretation of latent-variable regression models. *Journal of Chemometrics*, 34(9). <https://doi.org/10.1002/cem.3211>
9. Obushnyi, S., et al. (2021). Ensuring data security in the peer-to-peer economic system of the DAO. In *Cybersecurity Providing in Information and Telecommunication Systems II* (Vol. 3187, pp. 284–292).
10. Obushnyi, S., et al. (2022). Autonomy of economic agents in peer-to-peer systems. In *Cybersecurity Providing in Information and Telecommunication Systems* (Vol. 3288, pp. 125–133).
11. Turlach, B., Venables, W., & Wright, S. (2005). Simultaneous variable selection. *Technometrics*, 47(3), 349–363. <https://doi.org/10.1198/004017005000000139>
12. Virovets, D., et al. (2023). Ways of interaction of autonomous economic agents in decentralized autonomous organizations. In *Cybersecurity Providing in Information and Telecommunication Systems* (Vol. 3421, pp. 182–190).

13. Hlushak, O. M., & Semenyaka, S. O. (2017). Economic and mathematical modeling is a promising area of applied mathematics. *Physical and Mathematical Education*, 1(11), 28–31. http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/journals/2017-v1-11/2017_1-11-GlushakSemenyaka_Scientific_journal_FMO.pdf (in Ukrainian).
14. Hlushak, O. M., & Semenyaka, S. O. (2018). Prerequisites for building a multifactor econometric model: a study on multicollinearity. *Physical and Mathematical Education*, 1(15), 171-175. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2018-015-1-031> (in Ukrainian).
15. Hlushak, O. M., Бодненко, Д., & Semenyaka, S. O. (2018). Developing the IT skills of future financiers while studying the discipline "Econometrics." *Educational discourse*, 1–2(20–21), 325–340. Borys Grinchenko Kyiv University. <http://od.kubg.edu.ua/index.php/journal/article/view/492> (in Ukrainian).

| Матеріал надійшов до редакції: 02.10.2025 р. | Прийнято до друку: 10.11.2025 р. | Опубліковано: 28.11.2025 р. |



ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ ЕКОНОМІЧНОГО ЗМІСТУ

Тетяна ГРИЦИК ✉

Відокремлений структурний підрозділ «Рівненський фаховий коледж
Національного університету Біоресурсів
і природокористування України», Україна
grizik2008@ukr.net
<https://orcid.org/0009-0000-1132-7285>

CONSTRUCTION OF MATHEMATICAL MODELS WHEN SOLVING APPLIED PROBLEMS OF ECONOMIC CONTENT

Tetyana HRYTSIK ✉

Separate structural unit "Rivne Professional College
of the National University of Life Resources
and Environmental Sciences of Ukraine", Ukraine
grizik2008@ukr.net
<https://orcid.org/0009-0000-1132-7285>

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. Стаття присвячена систематизації та узагальненню основних типів математичних моделей, що застосовуються під час розв'язування прикладних задач економічного змісту в курсі вищої математики, а також визначенню педагогічних умов розвитку вмінь математичного моделювання у майбутніх економістів.

Матеріали і методи. У дослідженні використано комплекс теоретичних і емпіричних методів: аналіз науково-методичної літератури з проблеми математичного моделювання, узагальнення вітчизняного та зарубіжного досвіду, систематизація типових економіко-математичних моделей, педагогічні спостереження.

Результати. У статті обґрунтовано значення математичного моделювання як провідного методу формування професійної компетентності майбутніх економістів. Систематизовано основні типи математичних моделей, що використовуються в економічних задачах (матричні, векторні, лінійні, інтегральні, диференціальні, на основі похідної). Запропоновано узагальнену структурну схему математичної моделі прикладної задачі, яка поєднує етапи формалізації, аналітики й інтерпретації та відображає взаємозв'язок теоретичної і кількісної складових. З'ясовано, що саме реалізація цієї послідовності сприяє формуванню дослідницького типу мислення та розвитку аналітичних умінь здобувачів освіти.

Висновки. Визначено суперечність між потребою сучасної економічної освіти у фахівцях, здатних до моделювання й аналізу економічних процесів, та реальним станом математичної підготовки здобувачів освіти. Доведено, що системне використання прикладних задач економічного змісту в курсі вищої математики сприяє формуванню фахових компетентностей і розвитку економічного мислення. Перспективами подальших досліджень є створення методичних засобів і цифрових ресурсів для навчання математичного моделювання, а також інтеграція цього методу в міждисциплінарні курси економічного спрямування.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: математичне моделювання; математична модель; прикладна задача; вища математика; економічний зміст; прикладна спрямованість.

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Грицик Т. Побудова математичних моделей при розв'язуванні прикладних задач економічного змісту. *Фізико-математична освіта*, 2025. Том 40. № 5. С. 36-43. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i5-05>.

ABSTRACT

Formulation of the problem. The article aims to systematize and generalize the main types of mathematical models used in solving applied economic problems within the higher mathematics course, as well as to determine the pedagogical conditions that foster the development of mathematical modeling skills among future economists.

Materials and methods. The research employed a combination of theoretical and empirical methods, including an analysis of scientific and methodological literature on mathematical modeling, the synthesis and comparison of national and international studies, the systematization of typical economic-mathematical models, and pedagogical observations.

Results. The study substantiates the role of mathematical modelling as a core method in forming the professional competence of future economists. The main types of mathematical models used in economic problem-solving — matrix, vector, linear, integral, differential, and derivative-based models — were systematized. A generalized structural scheme of a mathematical model of an applied problem is proposed, integrating the stages of formalization, analysis, and interpretation, and reflecting the relationship between theoretical and quantitative components. It was found that the implementation of this sequence contributes to the development of research-oriented thinking and analytical skills of learners.

Conclusion. The study reveals a contradiction between the growing need for economists capable of modelling and analyzing economic processes and the insufficient level of students' mathematical training. It is proven that the systematic use of applied economic problems in the higher mathematics course promotes the formation of professional competences and the development of economic thinking. Further research should focus on the design of methodological tools and digital resources for teaching mathematical modeling, as well as on integrating modeling techniques into interdisciplinary economics-related courses.

KEYWORDS: mathematical modeling; mathematical model; applied problem; higher mathematics; economic content; applied orientation.

FOR CITATION: Hrytsik, T. (2025). Construction of mathematical models when solving applied problems of economic content. *Physical and Mathematical Education*, 40(5), 36-43. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i5-05>.

ВСТУП

Постановка проблеми. Сучасні соціально-економічні системи функціонують у середовищі високої невизначеності, що зумовлює потребу у фахівцях, здатних до аналітичного мислення, прогнозування та побудови моделей економічних процесів. Тому дедалі все більшого значення набувають математичні методи аналізу, оптимізації та прийняття рішень, що робить математичну підготовку майбутніх економістів фундаментом їхньої професійної діяльності. Уміння моделювати економічні явища і процеси є основою для формування навичок економічного мислення, аналітичної культури й здатності до аргументованих висновків у професійній діяльності.

Побудова математичних моделей дає змогу не лише відобразити реальні економічні процеси у формі формалізованих залежностей, а й досліджувати їх властивості, виявляти закономірності та прогнозувати результати управлінських рішень. Тому оволодіння методом математичного моделювання розглядається як показник глибини професійної підготовки майбутнього економіста. Здатність переходити від реальної економічної ситуації до її формалізованого опису, інтерпретувати отримані результати та співвідносити їх з практикою становить один із ключових компонентів професійної компетентності фахівця економічного профілю. Проте результати педагогічних спостережень і емпіричних досліджень свідчать про недостатню сформованість у здобувачів освіти умінь математичного моделювання. Майбутні економісти нерідко мають лише фрагментарні уявлення про метод моделювання, обмежуючись відтворенням готових алгоритмів без розуміння логіки переходів між етапами формалізації, аналітики та інтерпретації. Труднощі викликають не лише побудова моделей, а й осмислення економічного змісту отриманих результатів, що свідчить про слабкий зв'язок між теоретичною математичною підготовкою і прикладною економічною діяльністю. Отже, виникає суперечність між об'єктивною потребою сучасного ринку праці в економістах, здатних застосовувати математичні методи та моделювання для аналізу економічних процесів, і реальним станом їхньої підготовки, що характеризується недостатнім рівнем сформованості вмінь побудови й дослідження математичних моделей. Ця суперечність зумовлює необхідність пошуку ефективних шляхів розвитку вмінь математичного моделювання у процесі вивчення вищої математики, що й визначає науково-практичну значущість даного дослідження.

Аналіз актуальних досліджень. Проблематика математичного моделювання у підготовці фахівців економічного профілю посідає помітне місце у сучасній педагогічній та методичній літературі. Дослідники наголошують, що математичне моделювання виконує не лише інструментальну, а й світоглядну функцію, оскільки формує у здобувачів освіти системне бачення економічних процесів і здатність мислити у категоріях взаємозалежності та закономірностей. У цьому аспекті моделювання розглядається як провідний спосіб пізнання, який поєднує теоретичні положення математики з практичними завданнями економіки (Прус, 2023).

Українські вчені приділяють значну увагу проблемі професійної спрямованості математичної підготовки майбутніх економістів. Зокрема, у працях Самарук (2022), Бондаренко і Кирилашук (2017), Гусак і Гуліватої (2016) обґрунтовано необхідність інтеграції змісту економічних дисциплін із курсом вищої математики, що забезпечує формування стійких умінь застосовувати математичні моделі в аналізі виробничих, фінансових і соціально-економічних процесів. Дослідження Думанської (2015) акцентує увагу на типології професійних задач, розв'язання яких сприяє розвитку економічного мислення й формуванню математичної компетентності здобувачів освіти.

У зарубіжних студіях спостерігається посилення інтересу до проблеми навчання математичного моделювання як провідного компонента STEM-освіти. Greefrath і Vorhölter (2016) визначають моделювання як процес переходу від реальної ситуації до математичного її опису та інтерпретації результатів, а також підкреслюють його роль у розвитку критичного мислення. Hernandez-Martinez, Rogovchenko і Thomas (2021) розглядають особливості професійного мислення викладачів математики, які впроваджують моделювання в освітній процес, і роблять висновок, що від ефективності цієї практики залежить здатність здобувачів застосовувати математичні методи у нестандартних економічних ситуаціях. Blum і Niss (2024) досліджують історичну еволюцію поняття компетентності математичного моделювання та доводять, що його розвиток відбувається у тісному зв'язку із потребами економічної освіти та ринку праці.

Суттєвий внесок у вивчення тенденцій розвитку математичного моделювання зробили в'єтнамські дослідники Ngu, Nam, Cuong і Thao (2025), які відзначають різке зростання кількості наукових публікацій у базі Scopus, присвячених проблемі навчання моделюванню у вищій школі. Вони підкреслюють, що одним із визначальних трендів є перехід від традиційного викладання математики до викладання через моделювання, що сприяє підвищенню мотивації та практичної спрямованості навчання.

Таким чином, результати попередніх досліджень дають підстави стверджувати, що розвиток умінь математичного моделювання є стратегічним напрямом удосконалення математичної підготовки економістів. Водночас більшість робіт зосереджено на теоретичних засадах або описі окремих прикладів моделей, тоді як питання систематизації типів математичних моделей прикладних задач економічного змісту та методики їх узгодженого використання в курсі вищої математики залишаються недостатньо розробленими. Саме цю прогалину має на меті заповнити дане дослідження.

Мета статті – систематизувати та узагальнити основні математичні моделі, які застосовуються при розв'язуванні прикладних задач економічного змісту в курсі вищої математики.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Теоретичну основу дослідження становили аналіз і синтез науково-методичної, психолого-педагогічної та навчальної літератури, присвяченої проблемі математичного моделювання в економічній освіті; порівняльний аналіз вітчизняних і зарубіжних досліджень; систематизація й узагальнення отриманих відомостей з метою виокремлення типів математичних моделей прикладних задач. До емпіричних методів належали педагогічні спостереження за процесом навчання вищої математики, аналіз письмових робіт, спрямованих на виявлення рівня сформованості умінь побудови та дослідження математичних моделей.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У методичній літературі під прикладною задачею розуміють задачу, яка за формулюванням та методами розв'язування близька до задач, що виникають на практиці. Ці задачі містять реальні умови та ситуації, що мають місце у різних сферах діяльності сучасної людини: в побуті, на виробництві, в економіці тощо. Математичне моделювання завжди походить із практичної задачі, яка потім описується математичною моделлю та вирішується за допомогою цієї моделі. Весь процес називається моделюванням (Greefrath & Vorhölder, 2016).

Задачами економічного змісту називають задачі, пов'язані з фінансами, торгівлею, прийняттям оптимальних рішень, грошовими розрахунками. Погоджуємося з думкою, що задачі економічного змісту – потужний засіб розвитку економічного стилю мислення, економічного виховання, вироблення економічної грамотності (Бас, 2015). Будь-яка задача економічного змісту складається з предметного сюжету, умови та вимоги. Сюжет задачі містить економічні поняття, наприклад поняття собівартості, рентабельності, прибутку, витрат тощо.

У педагогічній літературі визначені основні методичні вимоги до системи прикладних задач: відповідність чинним навчальним програмам та підручникам з вищої математики, доступність та зрозумілість формулювання умови, відображення реальних виробничих процесів, дотримання наукової символіки та термінології, ілюстрація значущості математичних методів до розв'язання реальних проблем.

Математичне моделювання відносять до наукових методів вивчення явищ та процесів шляхом створення та дослідження їх математичних моделей. Математична модель – це система математичних та логічних співвідношень, що описують реальні системи. Дослідження математичної моделі дає можливість дізнатися про характеристики об'єкта вивчення. До загальних принципів математичного моделювання відносять: адекватність моделі, тобто її відповідність оригіналу; універсальність, що характеризує широту області застосування моделі; об'єктивність, тобто відповідність наукових висновків реальним умовам; чутливість, тобто здатність моделі реагувати на зміни параметрів; простота моделі; стійкість, що означає малу зміну моделі при малій зміні вихідних параметрів.

Розв'язування будь-якої прикладної задачі здійснюється за загальною схемою математичного моделювання та складається з трьох основних етапів (Blum & Leiss, 2007):

I. *Етап формалізації (математизації)*: відбувається «переклад» реальної практичної ситуації на мову математики. Результатом цього етапу є побудова математичної моделі.

II. *Аналітичний етап*: розв'язування задачі всередині математичної моделі, знаходження розв'язків відповідних математичних задач.

III. *Етап інтерпретації (дематематизації)*: здійснюється інтерпретація отриманого розв'язку відносно вихідної практичної ситуації.

Педагогічна практика свідчить, що у здобувачів освіти найменш сформовані навички реалізації першого та третього етапів моделювання. Важливо не тільки ознайомлювати студентів з готовими математичними моделями та працювати в межах цих моделей, а й навчати їх створювати та здійснювати переходи від практичних ситуацій до математичних задач і навпаки.

Пропонуємо розглядати математичні моделі через призму двох змістових складових: в узагальненій теоретичній формі (теоретична модель) та у конкретизованій формі з відповідною числовою інформацією (кількісна модель). Теоретична модель містить розв'язок у загальному вигляді, що включає вирази із змінними, рівняння або формули, які далі застосовуються у кількісній моделі. Теоретична та кількісна складові взаємно доповнюють одна одну і створюють цілісне уявлення про об'єкт вивчення.

Як приклад, розглянемо задачу на продуктивність праці. Обсяг продукції фірми, виробленої протягом дня представляє функцію $u(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{7}{2}t^2 + 2t$, де t – час в годинах. Знайти продуктивність праці через 3 години після початку роботи. Задача зводиться до математичної моделі на основі похідної. Теоретична модель задачі: нехай $u = u(t)$ – кількість виробленої продукції за відрізок часу t , де $t \in [0; T]$. Продуктивність праці в кожен момент часу $t_0 \in [0; T]$ дорівнює похідній від обсягу продукції: $P = u'(t_0)$. Кількісна модель задачі: знайдемо похідну функції $u = u(t)$: $u'(t) = t^2 + 7t + 2$. Отже, продуктивність праці змінюється за законом: $P(t) = t^2 + 7t + 2$. Обчислимо її значення у точці $t_0 = 3$ год: $u'(3) = 3^2 + 21 + 2 = 32$ одиниць. Отже, через 3 години від початку роботи фірма виготовлятиме 32 вироби за 1 годину.

Розглянемо основні типи математичних моделей в задачах економіки та проаналізуємо їх особливості.

1. Математичні моделі на основі поняття матриці та дій з матрицями (матричні моделі). Моделі цього типу застосовуються в задачах з лінійними залежностями між досліджуваними величинами. До матричних моделей належать моделі споживчого вибору, моделі фірми, моделі економічного росту, рівноваги на товарних, ресурсних і фінансових ринках та інші.

Особливості матричних моделей: до моделей цього типу зводяться здебільшого прикладні задачі, умова яких представлена у табличній формі; на етапі формалізації умова задачі записується у матричній формі, яка є зручною та компактною; в межах аналітичного етапу розглядаються операції над матрицями (додавання, віднімання матриць, множення матриці на число, транспонування матриці, знаходження оберненої матриці); Проілюструємо на прикладі вказані особливості.

Приклад. Підприємство випускає продукцію трьох видів P_1, P_2, P_3 , використовуючи сировину двох типів S_1, S_2 . Норми витрати одиниць сировини на виготовлення одиниці продукції кожного виду зазначені в таблиці:

Види продукції	Види сировини		План випуску, од.
	S_1	S_2	
P_1	3	4	120
P_2	2	5	70
P_3	6	7	100
Вартість сировини, у.о.	50	80	

Визначити витрати сировини для планового випуску продукції та загальну вартість сировини.

Розв’язання. Запишемо матриці норм витрат сировини $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, плану випуску продукції $V = (120 \ 70 \ 100)$ і

вартості сировини $C = \begin{pmatrix} 50 \\ 80 \end{pmatrix}$.

Матрицю витрат сировини S можна записати як добуток матриць V та A :

$$S = VA = (120 \ 70 \ 100) \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = (1100 \ 1530).$$

Тоді загальну вартість сировини представимо через добуток матриць S і C :

$$Q = SC = (1100 \ 1530) \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 80 \end{pmatrix} = (177400).$$

Отже, витрати видів сировини S_1 та S_2 дорівнюють 1100 і 1530 одиниць відповідно; загальна вартість сировини 177400 умовних одиниць.

2. Математичні моделі на основі поняття вектора (векторні моделі). Економічні процеси моделюються за допомогою векторів цін, обсягу споживчих товарів, витрат ресурсів, кредитів, процентних ставок та інших. Розглядається економічний зміст скалярного добутку векторів, що дає можливість визначити невідомі величини. Наприклад, якщо відомі вектор обсягу n товарів $\vec{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$, де x_i – обсяг i -го товару, та вектор цін $\vec{p} = (p_1; p_2; \dots; p_n)$, де p_i – ціна одиниці i -го товару, то скалярний добуток векторів $\vec{p} \cdot \vec{x} = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n$ визначає ціну набору цих товарів.

Особливості векторних моделей: однотипні набори числових даних задачі приймаються як координати векторів; розглядається скалярний добуток векторів, результатом якого є невідома економічна величина (певне число); введення векторів дає можливість упорядкувати розрахунки, зробити їх наочними та лаконічними; векторні моделі за своїм змістом схожі на матричні моделі.

Приклад. Ресурсні витрати фірми на виготовлення одиниці продукції задані в таблиці:

Ресурси	Кількість	Ціна
Сировина типу 1	150 кг	60 грн/кг
Сировина типу 2	80 кг	250 грн/кг
Сировина типу 3	60 кг	500 грн/кг
Оплата праці	0,5 людино-год	40 грн/людино-год
Обладнання	0,6 машино-год	50 грн/машино-год
Електроенергія	200 кВт	4 грн/кВт

Визначити ціну всіх ресурсів, що використовуються цією фірмою на виготовлення одиниці продукції.

Розв’язання. Запишемо другий стовпець таблиці даних як координати вектора ресурсів на одиницю продукції $\vec{x} = (150; 80; 60; 0,5; 0,6; 200)$, а третій стовпчик таблиці – як координати вектора цін одиниць відповідних ресурсів $\vec{p} = (60; 250; 500; 40; 50; 4)$. Скалярний добуток векторів \vec{p} та \vec{x} дорівнює загальній вартості усіх використаних ресурсів, тобто

$$\vec{p} \cdot \vec{x} = \sum_{i=1}^6 p_i x_i = 60 \cdot 150 + 250 \cdot 80 + 500 \cdot 60 + 40 \cdot 0,5 + 50 \cdot 0,6 + 4 \cdot 200 = 59850.$$

Отже, ресурсні витрати фірми на виготовлення одиниці продукції дорівнюють 59850 грн.

3. Математичні моделі на основі поняття системи лінійних рівнянь (лінійні моделі).

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь є одним із основних інструментів математичного моделювання задач економіки. До моделей цього типу зводиться ряд прикладних задач: про обсяг випуску продукції, про знаходження коефіцієнтів повних та непрямих витрат, плану та програми виробництва, про визначення оптимального плану, про знаходження витрат сировини, палива та трудових ресурсів та інші. Особливості моделей: задача зводиться до системи рівнянь, що містить певну кількість рівнянь та невідомих (залежно від умови); необхідно обрати раціональний спосіб розв’язування системи (наприклад, метод Гаусса, матричний тощо); з моделями цього типу здобувачі знайомі зі школи (на прикладі систем рівнянь з двома або трьома невідомими).

Приклад. Зі стандартних листів матеріалу необхідно викроїти заготовки трьох типів A, B, C у кількостях відповідно 400, 540, 310. Кількість заготовок, одержуваних з кожного листа при кожному способі розкроювання, наведені в таблиці.

Тип заготовки	Спосіб розкроювання		
	1	2	3
A	5	3	1
B	2	8	4
C	1	2	6

Визначити, скільки листів потрібно для викроювання даної кількості заготовок.

Розв'язання. Нехай x_1, x_2, x_3 – невідома кількість листів для заготовок типу A, B, C відповідно. Для викроювання заготовок типу A в загальній кількості 400 необхідно $5x_1 + 3x_2 + x_3$ листів, звідки отримуємо перше рівняння: $5x_1 + 3x_2 + x_3 = 400$. Для отримання 540 заготовок типу B необхідна кількість листів $2x_1 + 8x_2 + 4x_3$, тому маємо друге рівняння: $2x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 540$. Для виконання заготовок типу C сума $x_1 + 2x_2 + 6x_3$ має дорівнювати 310, тобто $x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 310$. Усі заготовки будуть викроєні за умови одночасного виконання трьох записаних рівнянь, тобто маємо

систему рівнянь, що є математичною моделлю задачі про розкроювання:
$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 400 \\ 2x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 540 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 310 \end{cases}$$
 Розв'язуючи цю систему

будь-яким методом (наприклад, методом Гаусса), отримаємо єдиний розв'язок: $x_1 = 50, x_2 = 40, x_3 = 30$. Отже, для повного виконання завдання потрібно 50 листів для заготовок типу A , 40 листів – типу B , 30 листів – типу C .

4. Математичні моделі на основі поняття похідної

Економічний зміст похідної включає визначення оптимальних обсягів випуску продукції, визначення еластичності попиту відносно доходу, аналіз граничного наближення до максимального доходу, визначення швидкості зміни економічного процесу. На основі поняття похідної будуються наступні узагальнені види математичних моделей економічних задач: модель продуктивності праці, модель маргінальних витрат, модель маргінального доходу, модель визначення максимуму прибутку, модель оптимізації оподаткування підприємства, модель еластичності та інші.

Особливості моделей на основі похідної: моделі цього типу розглядаються в розділах „Диференціювання функцій однієї змінної” та „Функції багатьох змінних”; похідна функції характеризує швидкість зміни певного економічного процесу або величини; передбачається розгляд деякої функції однієї або кількох змінної, яка встановлює залежність між економічними величинами; знаходяться похідні функції та аналізується їх економічний зміст.

Приклад. Обсяг видобування y деякої корисної копалини за одиницю часу залежить від кількості робітників x та визначається функцією $y = 8\sqrt{x}$. Ціна корисної копалини – 600 грн/т, заробітна плата робітника – 200 грн/год, інших витрат фірма не враховує. Знайти оптимальну кількість робітників фірми.

Розв'язання. Запишемо функцію прибутку фірми: $P(x) = 4800\sqrt{x} - 200x$. Дослідимо $P(x)$ на екстремум за допомогою похідної. Знайдемо похідну $P'(x)$: $P'(x) = 4800 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 200 = \frac{2400}{\sqrt{x}} - 200$.

Розв'яжемо рівняння $P'(x) = 0$ та знайдемо стаціонарні точки функції: $\frac{2400}{\sqrt{x}} - 200 = 0$, звідки $x = 144$.

Знайдемо другу похідну та її значення в стаціонарній точці: $P''(x) = 2400 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1200}{\sqrt{x^3}}$, $P''(144) = -\frac{1200}{\sqrt{144^3}} < 0$.

Таким чином, $x = 144$ – точка максимуму функції прибутку фірми. Отже, оптимальна кількість робітників фірми дорівнює 144.

5. Математичні моделі на основі визначеного інтеграла (інтегральна модель).

Через визначений інтеграл обчислюють сумарні економічні ефекти, наприклад загальний дохід фірми або загальні витрати виробництва. Якщо граничний дохід задано функцією $y = f(x)$, де x – кількість проданих одиниць товару,

то дохід від реалізації N одиниць продукції дорівнює:
$$\int_0^N f(x) dx$$
.

В економічних задачах часто використовують теорему про середнє значення функції. Наприклад, якщо $p = p(t)$ – змінний прибуток підприємства, то середнє значення прибутку за проміжок часу від t_1 до t_2 обчислюють через визначений

інтеграл:
$$p_c = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt$$
.

Особливості моделей на основі поняття інтеграла: операція інтегрування дає змогу отримати економічні функції за відомими їх граничними функціями; до моделей цього типу зводяться прикладні задачі на обчислення середніх значень економічних показників; застосовуються в задачах реалізації товарів та фінансових задачах; враховується тісний взаємозв'язок операцій диференціювання та інтегрування.

Приклад. За чистими інвестиціями $I(t)=80000t$ обчислити приріст капіталу з першого по четвертий рік. Визначити, за скільки років приріст капіталу становитиме 10 000 000 у.о.

Розв'язання. Приріст капіталу обчислимо за допомогою визначеного інтеграла: $\Delta K = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt$,

$$\Delta K = \int_1^4 80000t dt = 40000t^2 \Big|_1^4 = 600000 \text{ у.о.}$$

За проміжок часу t приріст капіталу має становити 10 000 000 у.о., тобто

$$40000t^2 \Big|_0^t = 10000000, t^2 = 250, t \approx 15,8 \text{ років.}$$

Отже, з першого по четвертий рік приріст капіталу 600 000 у.о., для приросту капіталу на 10 000 000 у.о. необхідно приблизно 15,8 років.

6. Математичні моделі на основі диференціальних рівнянь (диференціальні моделі).

На основі диференціальних рівнянь будуються моделі рівноважного зростання випуску продукції, зв'язку інфляції та безробіття, демографічного процесу, знецінювання обладнання та інші (Барабаш та ін., 2019). Особливості моделей цього типу: описують складні функціональні залежності в економічних явищах та процесах; відображають динаміку змін економічних величин, тобто є динамічними математичними моделями; моделі містять крім невідомих величин також їх похідні різних порядків; потребують сформованих умінь інтегрувати диференціальні рівняння. Розглянемо приклад диференціальної моделі першого порядку.

Приклад. У 2000 році населення деякої країни налічувало 60 млн осіб. Якою буде чисельність населення цієї країни у 2030 році, якщо відомо, що населення у 2020 році становило 64 млн. Швидкість зміни приросту населення вважати пропорційною кількості населення.

Розв'язання. Кількість населення y зростає і є функцією часу t , тобто $y = y(t)$. Оскільки швидкість зміни приросту населення пропорційна його кількості, то $\frac{dy}{dt} = ky$, де k – коефіцієнт пропорційності. Отримане диференціальне рівняння

$\frac{dy}{dt} = ky$ є математичною моделлю даного демографічного процесу. Відокремимо змінні та знайдемо загальний розв'язок

рівняння: $\frac{dy}{y} = k dt$, $y = Ce^{kt}$, де $C = const$.

Визначимо сталу інтегрування C , поклавши, що в початковий момент часу $t=0$ кількість населення $y = 60$ млн: $Ce^0 = 60$, звідки $C = 60$.

Обчислимо k з умови, що через $t=20$ років кількість населення $y=64$ млн. осіб: $60e^{20k} = 64$, звідки $k = \frac{1}{20} \ln \frac{16}{15}$.

Таким чином, одержали частинний розв'язок диференціального рівняння у вигляді: $y = 60e^{\frac{1}{20} \ln \frac{16}{15} t}$. Знайдемо кількість населення у 2030 році, поклавши в останній формулі $t = 30$: $y = 60e^{\frac{1}{20} \ln \frac{16}{15} 30} = 60 \cdot 32^{20} \approx 71,4$ млн осіб.

Отже, чисельність населення країни у 2030 році наближено становитиме 71,4 млн осіб.

Підсумовуючи наведені приклади математичних моделей різних типів (матричних, векторних, лінійних, диференціальних, інтегральних і моделей на основі похідної) можна констатувати, що всі вони демонструють спільну логіку побудови й функціонування. Незважаючи на відмінності у змісті, ступені складності чи галузі застосування, кожна модель проходить три послідовні стадії: формалізацію, аналітичну обробку та інтерпретацію результатів. Саме ця послідовність забезпечує перехід від реальної економічної ситуації до її узагальненого теоретичного опису, а далі — до практичного висновку, що має прикладне значення для майбутнього економіста. Така спільність структурних елементів дає підстави розглядати процес моделювання як цілісну систему, у якій узгоджено взаємодіють теоретична і кількісна складові. Для наочного подання цієї системи побудовано узагальнену структурну схему математичної моделі прикладної задачі (Рис. 1), що відображає внутрішні логічні зв'язки між етапами моделювання та різновидами моделей.

Інтерпретація поданої схеми дає змогу зробити кілька важливих умовиводів. По-перше, універсальність структури моделі свідчить про те, що метод математичного моделювання можна розглядати як наскрізний дидактичний принцип викладання вищої математики майбутнім економістам. Вона забезпечує можливість інтеграції різних розділів курсу (лінійна алгебра, математичний аналіз, теорія диференціальних рівнянь) у єдине поле практичних застосувань. По-друге, подвійна природа моделі (теоретична та кількісна) дозволяє поєднувати абстрактне мислення з практичною аналітикою. Такий підхід сприяє розвитку у здобувачів умінь переходити від символічних формул до економічного змісту, від загального закону до конкретного числового результату. По-третє, виділення етапів формалізації, аналітики й інтерпретації відображає поступове зростання когнітивної складності навчальної діяльності: від розуміння умови задачі до вибору адекватних математичних засобів і, зрештою, до осмислення результату в економічному контексті. Саме ця багаторівнева побудова моделі формує у здобувачів освіти не лише технічні навички, а й здатність до наукового узагальнення, аналізу й прогнозування. Тому узагальнена структурна схема виконує подвійну функцію – методологічну й педагогічну. З одного боку, вона є інструментом аналізу економічних процесів, а з іншого, засобом навчання, що допомагає формувати системне бачення ролі математики в економіці. Такий підхід поглиблює розуміння здобувачами сутності моделювання як методу пізнання та сприяє формуванню дослідницького типу мислення, необхідного для сучасного економіста.

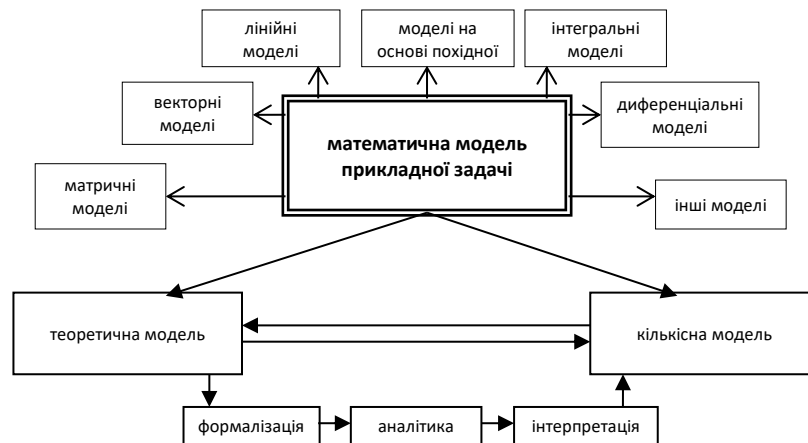


Рис. 1. Узагальнена структурна схема математичної моделі прикладної задачі

Джерело: авторська розробка

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Проведене дослідження підтвердило, що математичне моделювання є базовим засобом розвитку фахових компетентностей майбутніх економістів, адже забезпечує поєднання абстрактного теоретичного мислення з умінням аналізувати реальні економічні процеси. Запропонована систематизація моделей прикладних задач дозволила виявити закономірності їх побудови та узагальнити підхід до їх використання в курсі вищої математики. Виявлено, що послідовна реалізація етапів формалізації, аналітики та інтерпретації створює ефективну педагогічну рамку для формування навичок дослідницького мислення та самостійного вирішення професійних проблем.

Розвиток умінь математичного моделювання сприяє становленню у здобувачів економічного мислення, уміння прогнозувати тенденції та приймати обґрунтовані рішення. Водночас результати педагогічного діагностування свідчать, що більшість здобувачів освіти демонструють лише середній рівень володіння навичками моделювання, особливо на етапах формалізації реальних ситуацій і тлумачення отриманих результатів. Це підтверджує необхідність цілеспрямованого вдосконалення методики викладання вищої математики з акцентом на практико-орієнтованих завданнях економічного змісту та використанні моделювання як наскрізного методу навчання.

Узагальнена структурна схема математичної моделі прикладної задачі, розроблена в межах дослідження, може бути використана як дидактичний інструмент для проектування навчальних занять, організації самостійної роботи здобувачів та створення електронних навчальних ресурсів. Її застосування сприяє розвитку пізнавальної самостійності, формуванню аналітичного й критичного мислення, а також підвищенню мотивації до навчання математичних дисциплін.

Перспективи подальших досліджень полягають у розробленні й апробації методичних засобів формування вмій математичного моделювання з використанням цифрових технологій, симуляційного середовища та програмних пакетів економіко-математичного аналізу. Доцільним є також вивчення можливостей інтеграції моделювання у міждисциплінарні курси, зокрема фінансової аналітики, статистики, прогнозування та управління ризиками, що дозволить підвищити практичну значущість математичної підготовки майбутніх економістів і сприятиме розвитку їхньої дослідницької компетентності.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори підтверджують відсутність фінансових, особистих чи інших інтересів, що можуть розглядатися як потенційний конфлікт інтересів щодо публікації цієї статті.

ФІНАНСУВАННЯ

Робота виконана за відсутності фінансової підтримки з боку будь-яких організацій.

ДОСТУПНІСТЬ ДАНИХ

Це теоретичне дослідження не передбачає використання додаткових наборів даних.

ВИКОРИСТАННЯ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Інструменти штучного інтелекту не використовувались при написанні цієї роботи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- Blum, W. & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with mathematical modeling problems? The example "filling up". In C.Haines (Eds.), *Mathematical Modelling. Education, Engineering, and Economics-ICTMA 12*. (pp. 222–231). Woodhead Publishing. <https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221>
- Blum, W. & Niss, M. (2024). Origin and Development of the Notion of Mathematical Modelling Competency/Competencies. In H.Siller, V.Geiger,G.Kaiser (Eds.), *Researching Mathematical Modelling Education in Disruptive Times*. (pp. 185–200). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-53322-8_14

3. Greefrath, G., & Vorhölter, K. (2016). *Teaching and Learning Mathematical Modelling, ICME-13 Topical Surveys*. SpringerOpen. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45004-9_1
4. Hernandez-Martinez, P., Rogovchenko, Y. & Thomas, S. (2021). 'I'm still making dots for them': Mathematics lecturers' views on their mathematical modelling practices. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 52(2), 165–177. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1668977>
5. Ngu, P. N. H., Nam, N. D., Cuong, L. M., & Thao, T. T. P. (2025). Mathematical modelling in higher education: Evolving research and emerging trends (1980–2023). *Infinity Journal*, 14(2), 393-418. <https://doi.org/10.22460/infinity.v14i2.p393-418>
6. Барабаш, Г. М., Кирилич, В. М., & Пелюшкевич, О. В. (2019). *Збірник-довідник з курсу „Вища математика для економістів”*. ЛНУ імені Івана Франка. https://new.mmf.lnu.edu.ua/wp-content/uploads/2021/09/1s3_NHYE_var_08-04-2019.pdf
7. Бас, С.В. (2019). *Формування предметної компетентності у процесі навчання вищої математики студентів економічних спеціальностей*. дис. канд. пед. наук, Криворізький національний університет. <http://elibrary.kdpu.edu.ua/xmlui/handle/0564/1589>
8. Бондаренко, З. В., & Кириляшук, С. А. (2017). Прикладна спрямованість викладання вищої математики студентам економічного профілю ВНЗ. *Вісник Житомирського державного університету імені Івана Франка. Педагогічні науки*, 4(90), 22-26. <https://eprints.zu.edu.ua/25845/1/6.pdf>
9. Гусак, Л. П., & Гулівата, І. О. (2016). Математичне моделювання як засіб здійснення професійної спрямованості навчання математики на економічних спеціальностях ВНЗ. *Науковий вісник Ужгородського національного університету. Серія: Педагогіка. Соціальна робота*, 1 (38), 105–107. <https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/bitstream/lib/13517/1/>
10. Думанська, Т. В. (2015). Визначення типології професійних задач майбутнього бакалавра економіки як важливого чинника формування його математичних компетентностей під час навчання вищої математики. *Science and Education: A New Dimension. Pedagogy and Psychology*, III(37), 50–53. https://seanewdim.com/wp-content/uploads/2021/03/ped_psy_iii37_75.pdf
11. Самарук, Н.М. (2022). Шляхи реалізації професійної спрямованості математичної підготовки студентів економічних спеціальностей. *Grundlagen der modernen wissenschaftlichen Forschung*, (12), 160-162. <https://doi.org/10.36074/logos-12.08.2022.50>
12. Прус, А. (2023). Математичне моделювання як лінза реального світу. *Фізико-математична освіта*, 38(4), 56-61. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-4-008>

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Blum, W. & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with mathematical modeling problems? The example "filling up". In C.Haines (Eds.), *Mathematical Modelling. Education, Engineering and Economics-ICTMA 12*. (pp. 222–231). Woodhead Publishing. <https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221>
2. Blum, W. & Niss, M. (2024). Origin and Development of the Notion of Mathematical Modelling Competency/Competencies. In H.Siller, V.Geiger,G.Kaiser (Eds.), *Researching Mathematical Modelling Education in Disruptive Times*. (pp. 185–200). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-53322-8_14
3. Greefrath, G., & Vorhölter, K. (2016). *Teaching and Learning Mathematical Modelling, ICME-13 Topical Surveys*. SpringerOpen. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45004-9_1
4. Hernandez-Martinez, P., Rogovchenko, Y. & Thomas, S. (2021). Im still making dots for them: Mathematics lecturers views on their mathematical modelling practices. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 52(2), 165–177. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1668977>
5. Ngu, P. N. H., Nam, N. D., Cuong, L. M., & Thao, T. T. P. (2025). Mathematical modelling in higher education: Evolving research and emerging trends (1980–2023). *Infinity Journal*, 14(2), 393-418. <https://doi.org/10.22460/infinity.v14i2.p393-418>
6. Barabash, H. M., Kyrylych, V. M., & Peliushkevych, O. V. (2019). *Zbirnyk-dovidnyk z kursu „Vyscha matematika dlia ekonomistiv” [Handbook for the course "Higher Mathematics for Economists"]*. LNU imeni Ivana Franka. https://new.mmf.lnu.edu.ua/wp-content/uploads/2021/09/1s3_NHYE_var_08-04-2019.pdf (in Ukrainian).
7. Bas, S.V. (2019). *Formuvannya predmetnoi kompetentnosti u protsesi navchannia vyshchoi matematyky studentiv ekonomichnykh spetsialnosti [Formation of subject competence in the process of teaching higher mathematics to students of economic specialties]*. Candidate's thesis. Kryvorizkyi natsionalnyi universytet. <http://elibrary.kdpu.edu.ua/xmlui/handle/0564/1589> (in Ukrainian).
8. Bondarenko, Z. V., & Kyrylyashchuk, S. A. (2017). *Prykladna spriamovanist vykladannia vyshchoi matematyky studentam ekonomichnoho profilu VNZ [Applied orientation of teaching higher mathematics to students of economic profile of universities]*. *Visnyk Zhytomyrskoho derzhavnoho universytetu imeni Ivana Franka. Pedagogichni nauky – Bulletin of the Ivan Franko Zhytomyr State University. Pedagogical Sciences*, 4(90), 22-26. <https://eprints.zu.edu.ua/25845/1/6.pdf> (in Ukrainian).
9. Husak, L. P., & Hulivata, I. O. (2016). *Matematychni modeliuvannia yak zasib zdiisnennia profesiinoi spriamovanosti navchannia matematyky na ekonomichnykh spetsialnostiakh VNZ [Mathematical modeling as a means of implementing the professional orientation of mathematics teaching in economic specialties of universities.]*. *Naukovyi visnyk Uzhhorodskoho natsionalnoho universytetu. Serii: Pedagogika. Sotsialna robota – Scientific Bulletin of Uzhhorod National University. Series: Pedagogy. Social Work*, 1 (38), 105–107. <https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/bitstream/lib/13517/1/> (in Ukrainian).
10. Dumanska, T. V. (2015). *Vyznachennia typolohii profesiinykh zadach maibutnoho bakalavra ekonomiky yak vazhlyvoho chynnyka formuvannia yoho matematychnykh kompetentnosti pid chas navchannia vyshchoi matematyky [Determining the typology of professional tasks of a future bachelor of economics as an important factor in the formation of his mathematical competencies during the study of higher mathematics]*. *Science and Education: A New Dimension. Pedagogy and Psychology – Science and Education: A New Dimension. Pedagogy and Psychology*, III(37), 50–53. https://seanewdim.com/wp-content/uploads/2021/03/ped_psy_iii37_75.pdf (in Ukrainian).
11. Samaruk, N.M. (2022). *Shliakhy realizatsii profesiinoi spriamovanosti matematychnoi pidhotovky studentiv ekonomichnykh spetsialnosti [Ways to implement the professional orientation of mathematical training for students of economic specialties]*. *Grundlagen der modernen wissenschaftlichen Forschung – Fundamentals of modern scientific research*, (12), 160-162. <https://doi.org/10.36074/logos-12.08.2022.50> (in Ukrainian).
12. Prus, A. (2023). *Matematychni modeliuvannia yak linza realnoho svitu [Mathematical modeling as a lens of the real world]*. *Fizyko-matematychna osvita – Physics and mathematics education*, 38(4), 56-61. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-4-008> (in Ukrainian).

| *Матеріал надійшов до редакції: 09.08.2025 р.* | *Прийнято до друку: 25.10.2025 р.* | *Опубліковано: 28.11.2025 р.* |



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.

КОНЦЕПТУАЛЬНА МОДЕЛЬ ІНТЕГРАЦІЇ ГЕНЕРАТИВНОГО ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ У ПРОЦЕС РОЗВИТКУ ІНФОРМАЦІЙНО-ЦИФРОВОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ УЧНІВ РІВНЯ БАЗОВОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ

Світлана ЛИТВИНОВА

*Інститут цифровізації освіти НАПН України, Україна
lyts@iitlt.gov.ua
<https://orcid.org/0000-0002-5450-6635>*

Юлія НОСЕНКО ✉

*Інститут цифровізації освіти НАПН України, Україна
nosenko-y@ukr.net
<https://orcid.org/0000-0002-9149-8208>*

Катерина ОСАДЧА

*Інститут цифровізації освіти НАПН України, Україна
k.osadcha@iitlt.gov.ua
<https://orcid.org/0000-0003-0653-6423>*

Ольга ПІНЧУК

*Інститут цифровізації освіти НАПН України, Україна
opinchuk@iitlt.gov.ua
<https://orcid.org/0000-0002-2770-0838>*

Наталія РАШЕВСЬКА

*Інститут цифровізації освіти НАПН України, Україна
nvr1701@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-6431-2503>*

Аліса СУХІХ

*Інститут цифровізації освіти НАПН України, Україна
sukhikh@iitlt.gov.ua
<https://orcid.org/0000-0001-8186-1715>*

CONCEPTUAL MODEL OF GENERATIVE ARTIFICIAL INTELLIGENCE INTEGRATION INTO THE PROCESS OF DEVELOPING INFORMATION AND DIGITAL COMPETENCE IN STUDENTS AT THE BASIC SECONDARY EDUCATION LEVEL

Svitlana LYTVYNOVA

*Institute for Digitalisation of Education of the National Academy
of Educational Sciences of Ukraine, Ukraine
lyts@iitlt.gov.ua, <https://orcid.org/0000-0002-5450-6635>*

Yulia NOSENKO ✉

*Institute for Digitalisation of Education of the National Academy
of Educational Sciences of Ukraine, Ukraine
nosenko-y@ukr.net, <https://orcid.org/0000-0002-9149-8208>*

Kateryna OSADCHA

*Institute for Digitalisation of Education of the National Academy
of Educational Sciences of Ukraine, Ukraine
k.osadcha@iitlt.gov.ua, <https://orcid.org/0000-0003-0653-6423>*

Olha PINCHUK

*Institute for Digitalisation of Education of the National Academy
of Educational Sciences of Ukraine, Ukraine
opinchuk@iitlt.gov.ua, <https://orcid.org/0000-0002-2770-0838>*

Natalia RASHEVSKA

*Institute for Digitalisation of Education of the National Academy
of Educational Sciences of Ukraine, Ukraine
nvr1701@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-6431-2503>*

Alisa SUKHICH

*Institute for Digitalisation of Education of the National Academy
of Educational Sciences of Ukraine, Ukraine
sukhikh@iitlt.gov.ua, <https://orcid.org/0000-0001-8186-1715>*

АНОТАЦІЯ

У статті розглянуто інтеграцію генеративного штучного інтелекту (ГШІ) у процес розвитку інформаційно-цифрової компетентності (ІЦК) учнів базової середньої освіти. Підкреслено актуальність створення концептуальної моделі, що поєднує педагогічні, когнітивні, технологічні та етичні виміри й спирається на рамку DigComp 2.2 та рекомендації UNESCO.

Формулювання проблеми. ІЦК стає ключовою у цифровому суспільстві, однак традиційні підходи в школі не забезпечують належного рівня її формування. Учні відчувають складнощі у пошуку та критичному аналізі інформації, а освітній процес потребує індивідуалізації та ширшого використання цифрових засобів. Поширення ГШІ актуалізує необхідність концептуального його впровадження з урахуванням педагогічної доцільності, етики та безпеки.

Матеріали і методи. Використано аналіз наукової й методичної літератури, міжнародних документів з цифрової грамотності, результати педагогічного спостереження та контент-аналіз освітніх практик. Для побудови моделі застосовано метод моделювання і структурно-

ABSTRACT

The article considers the integration of generative artificial intelligence (GAI) into developing students' information and digital competence (IDC) in basic secondary education. The relevance of creating a conceptual model that combines pedagogical, cognitive, technological, and ethical dimensions based on the DigComp 2.2 framework and UNESCO recommendations is emphasized.

Formulation of the problem. IDC is becoming increasingly important in the digital society, but traditional approaches in schools do not provide the proper level of its formation. Students often face difficulties in searching and critically analyzing information, and the educational process requires individualization and a broader use of digital tools. The spread of GSI highlights the need for its conceptual implementation, considering pedagogical feasibility, ethics, and security.

Materials and methods. The analysis of scientific and methodological literature, international documents on digital literacy, the results of pedagogical observations, and content analysis of educational practices were employed. The modeling method and structural-functional analysis were employed to

функціональний аналіз, що дозволив визначити взаємозв'язки між її складниками.

Результати. Розроблено концептуальну модель інтеграції ГШІ у розвиток ІЦК учнів, яка має багаторівневу реалізацію. На рівні учня – персоналізація освітніх траєкторій, чат-боти, системи рекомендацій, розвиток критичного мислення; на рівні вчителя – оптимізація рутинних завдань, аналіз досягнень, створення індивідуальних планів; на рівні управління – аналітика для прогнозування результатів і корекції програм; на суспільному рівні – вирішення питань доступності, захисту даних, подолання алгоритмічної упередженості. Модель охоплює цільовий, суб'єктно-об'єктний, змістовий, технологічний, методичний, організаційний, етичний і результативно-оцінювальний складники, що формують цілісну систему.

Висновки. Інтеграція ГШІ у навчання відкриває нові можливості для розвитку критичного мислення, цифрової творчості та автономії учнів. Модель має теоретичну й практичну значущість, може бути використана для оновлення освітніх стандартів, створення методичних матеріалів і програм підвищення кваліфікації педагогів. Її реалізація сприяє формуванню готовності школярів до усвідомленої взаємодії з інтелектуальними технологіями в умовах цифрової трансформації.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: інформаційно-цифрова компетентність; генеративний штучний інтелект (ГШІ); учні; базова середня освіта; концептуальна модель інтеграції ГШІ.

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Литвинова С., Носенко Ю., Осадча К., Пінчук О., Рашевська Н., Сухих А. Концептуальна модель інтеграції генеративного штучного інтелекту у процес розвитку інформаційно-цифрової компетентності учнів рівня базової середньої освіти. *Фізико-математична освіта*, 2025. Том 40. № 5. С. 44-52. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i5-06>.

construct the model, enabling it to identify the relationships between its components.

Results. A conceptual model of integrating GSI into the development of students' ICT has been developed, with a multi-level implementation. At the student level - personalization of educational trajectories, chat bots, recommendation systems, development of critical thinking; at the teacher level - optimization of routine tasks, analysis of achievements, creation of individual plans; at the management level - analytics for predicting results and correcting programs; at the social level - solving issues of accessibility, data protection, overcoming algorithmic bias. The model encompasses target, subject-object, content, technological, methodological, organizational, ethical, and result-evaluation components, forming a holistic system.

Conclusions. Integrating GSI into teaching opens up new opportunities for developing critical thinking, digital creativity, and student autonomy. The model has both theoretical and practical significance, and can be used to update educational standards, create methodological materials, and inform teacher training programs. Its implementation contributes to the formation of students' readiness for conscious interaction with intelligent technologies in the context of digital transformation.

KEYWORDS: information and digital competence; generative artificial intelligence (GAI); students; basic secondary education; conceptual model of GAI integration.

FOR CITATION: Lytvynova, S., Nosenko, Yu., Osadcha, K., Pinchuk, O., Rashevskaya, N., & Sukhikh, A. (2025). Conceptual model of generative artificial intelligence integration into the process of developing information and digital competence in students at the basic secondary education level. *Physical and Mathematical Education*, 40(5), 44-52. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i5-06>.

ВСТУП

Постановка проблеми. Сучасний освітній процес не завжди забезпечує належний рівень формування інформаційно-цифрової компетентності учнів. Школярі часто мають труднощі із самостійним пошуком та опрацюванням інформації, критичною оцінкою джерел і результатів використання цифрових технологій. Традиційні методи навчання обмежують можливості персоналізації освітньої траєкторії відповідно до індивідуальних потреб та рівня підготовки кожного здобувача освіти. Водночас успішне проникнення технологій на основі штучного інтелекту (ШІ) у повсякденне життя людини зумовлює зростання освітнього та соціального інтересу до опанування навичками взаємодії з цими технологіями. У системі загальної середньої освіти постає завдання підготувати учнів до життя у суспільстві, де вони дедалі частіше співпрацюватимуть із технологіями ШІ, що висуває нові вимоги до педагогічної практики.

Відсутність інтеграції сучасних цифрових інструментів, зокрема генеративного штучного інтелекту (ГШІ), уповільнює розвиток критичного мислення, цифрової етики та безпечного використання інформації. У цьому контексті формування інформаційно-цифрової компетентності в аспекті використання ШІ постає як педагогічна та когнітивна проблема, що потребує переосмислення підходів до організації освітнього процесу. Інтеграція ГШІ в освітній процес закладів загальної середньої освіти (ЗЗСО) відкриває можливості для створення адаптивних освітніх траєкторій, які враховують темп навчання, інтереси та здібності учнів. Це забезпечує персоналізовану підтримку у формуванні запитів, обробці даних та оцінюванні результатів, що сприяє розвитку практичних і критичних цифрових навичок. Крім того, використання ГШІ полегшує роботу вчителів, дозволяючи ефективніше аналізувати прогрес учнів, оптимізувати навчальні ресурси та вдосконалювати педагогічні стратегії.

Отже, інтеграція інструментів ШІ в освітній процес є перспективним шляхом розв'язання проблеми недостатнього розвитку інформаційно-цифрової компетентності, створюючи умови для формування навичок безпечної, етичної та критично обґрунтованої взаємодії з новітніми цифровими технологіями.

Аналіз актуальних досліджень Перші спроби застосування ШІ в освіті датуються 1970-ми роками, коли ці технології почали використовуватися для підтримки навчання, викладання та управління освітніми закладами (Casal-Otero et al., 2023). Проте й досі немає жодної країни, де ШІ повністю інтегровано у процес навчання школярів. У США протягом останніх років активно розробляються локальні ініціативи й STEM-проекти для інтеграції ШІ у середню школу (Touretzky et al., 2019; Owoeye, 2024). У Китаї Міністерство освіти включило основи ШІ до обов'язкової програми середньої школи (Jiang et al., 2023). У Сінгапурі державна стратегія передбачає ознайомлення дітей із концепціями ШІ вже на рівні дошкільної освіти (Heintz, 2021). У Європі також реалізуються окремі ініціативи: зокрема, у Німеччині запущено пілотні проекти з впровадження навчальних курсів, пов'язаних із ШІ (Micheuz, 2020).

У науковій літературі поняття грамотності у сфері ШІ розкривається через кілька вимірів: знання, практичне застосування, оцінка власного використання та етичні аспекти (Zhou & Schofield, 2024). Основні напрями застосування ШІ в освіті охоплюють адаптивне й персоналізоване навчання, інтелектуальне оцінювання та управління освітнім процесом, профілювання учнів і прогнозування результатів на основі даних, а також використання цифрових продуктів для організації навчання (Wang et al., 2024).

Сучасні концептуальні моделі інтеграції ШІ пропонують різні підходи: технічний, критичний та етичний компоненти компетентності (Cheah et al., 2025); педагогічні моделі та поетапні стратегії впровадження (Zhou & Schofield, 2024; Wang et al., 2024); а також моделі прийняття технологій, що враховують готовність учителів і організаційні бар'єри (Ateş & Gündüzalp, 2025). Системний огляд літератури (Chen et al., 2020) засвідчує, що штучний інтелект виступає не лише інструментом автоматизації освітніх процесів, а й засобом розвитку критичного мислення та цифрових навичок учнів. У дослідженнях підкреслюється, що інтеграція ГШІ може реалізовуватися через адаптивні моделі навчання, персоналізований контент та автоматизовані підходи до оцінювання, що безпосередньо сприяє формуванню інформаційно-цифрової компетентності. Зроблено висновок, що такі технології створюють технічні передумови для персоналізованого розвитку зазначеної компетентності.

У європейській рамці цифрової компетентності DigComp 2.2 виокремлено компетентності, пов'язані з використанням ШІ: уміння формулювати запити, інтерпретувати й критично оцінювати результати. Це напряму поєднується з Data Literacy, що підкреслює зв'язок інформаційної та цифрової компетентностей. Цей документ та відповідні дослідження разом виступають методологічною основою для розроблення концептуальної моделі інтеграції ГШІ у процес формування інформаційно-цифрової компетентності учнів, підтверджуючи, що розвиток цих компетентностей неможливий без ефективного впровадження ГШІ (Vuorikari et al., 2022; Van Audenhove et al., 2024).

Дослідники пропонують також моделі компетентностей, орієнтовані саме на ГШІ. Зокрема, автори (Annapureddy et al., 2025) виокремлюють 12 компетентностей, серед яких – уміння створювати якісні запити, критично аналізувати відповіді та усвідомлювати обмеження й ризики ГШІ. Окремо розроблено рамки компетентності для учнів і вчителів, де останні виступають провідниками інтеграції технологій у навчальний процес, з акцентом на методичному та етичному вимірах (UNESCO, 2024a; 2024b).

У дослідженнях (Holmes et al., 2021; 2022) значна увага приділена питанням колективної відповідальності та академічної доброчесності у використанні ШІ. Автори пропонують принципи прозорості алгоритмів, захисту авторських прав і вироблення спільних правил для забезпечення етичного застосування ШІ у навчанні. За результатами досліджень (Kamali et al., 2024), етика штучного інтелекту постає як багатовимірний виклик, що охоплює правові, культурні та освітні аспекти. Автор наголошує на необхідності дотримання правових норм, урахування культурних чинників та формування критичного мислення учнів, підкреслюючи, що етичні питання ШІ потребують комплексного й багаторівневого підходу. У сфері інтеграції ГШІ в освіту це зумовлює потребу в системному етичному супроводі.

Дослідження (Beninger et al., 2025) акцентує на формуванні грамотності ГШІ як ключового складника цифрової адаптації освіти. Автори підкреслюють важливість поєднання соціально-етичних міркувань із практичними навичками (розуміння, використання, оцінка), наголошують на цінності навіть невеликих педагогічних втручань для підвищення рівня грамотності й закликають до інтеграції ГШІ-грамотності в освітні програми.

Отже, аналіз досліджень свідчить про необхідність системного осмислення ролі ГШІ у формуванні інформаційно-цифрової компетентності учнів та етичних аспектів його використання. Водночас відсутність науково обґрунтованої концептуальної моделі інтеграції ГШІ у процес навчання ускладнює реалізацію його потенціалу для розвитку критичного мислення, цифрової грамотності та творчої самореалізації учнів у закладах базової середньої освіти.

Мета статті – обґрунтувати концептуальну модель інтеграції ГШІ у процес розвитку інформаційно-цифрової компетентності учнів закладів базової середньої освіти.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Теоретичний аналіз наукових джерел і педагогічної літератури щодо розвитку інформаційно-цифрової компетентності, інтеграції технологій ГШІ в освітній процес та методології розробки концептуальних моделей. Емпіричні методи: спостереження. Контент-аналіз для оцінювання діяльності учасників освітнього процесу. Методи моделювання та валідації: розробка концептуальної моделі інтеграції ГШІ, аналіз взаємозв'язків між компонентами моделі для корекції та оптимізації її застосування.

Дослідження виконане в межах «Комплексного наукового дослідження використання генеративного штучного інтелекту на різних рівнях освіти для удосконалення педагогічних та управлінських практик», що виконується за рахунок бюджетних коштів, спрямованих на забезпечення проведення державними науковими установами наукових досліджень і науково-технічних (експериментальних) розробок за результатами державної атестації згідно договору № БФ/ С12–2025 про виконання наукового дослідження, яка за результатами державної атестації за науковим напрямом «Суспільний» віднесена до групи А.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Інформаційно-цифрова компетентність (ІЦК) є ключовим чинником розвитку загальної середньої освіти та визначається стрімким поширенням цифрових технологій у педагогічній практиці вчителів. Європейська рамка DigComp 2.2 (Vuorikari et al., 2022) виокремлює п'ять складників ІЦК: інформаційну грамотність і роботу з даними, комунікацію та співпрацю, створення цифрового контенту, безпеку та розв'язання проблем. Ці складники становлять методологічну основу для інтеграції інноваційних технологій, зокрема ГШІ, в освітній процес. У документі наведено приклади навичок, ставлень і підходів, що враховують роль новітніх технологій, у тому числі ШІ. Таким чином, DigComp 2.2 може слугувати теоретичною базою для визначення змісту ІЦК у закладах загальної середньої освіти.

Зростання ролі ШІ в освітньому середовищі актуалізує потребу у виробленні концептуальної моделі його інтеграції, що розглядається як система абстрактних понять, яка пояснює властивості та взаємозв'язки освітнього процесу з новітніми технологіями. Така модель має охоплювати не лише технічний вимір застосування ШІ, а й педагогічні, етичні та когнітивні аспекти. У цьому контексті важливим є узгодження міжнародних стандартів цифрової компетентності з новими викликами, що постають перед закладами загальної середньої освіти в умовах впровадження ГШІ.

Зокрема, у документі UNESCO Guidance for Generative AI in Education and Research (2023) окреслено комплекс заходів для держав, які інтегрують ГШІ: формування освітніх політик, забезпечення підтримки, дотримання етичних норм, захист конфіденційності та пріоритетність дитиноцентризму (людиноцентризму). Підкреслюється необхідність урахування правових, етичних і політичних аспектів – зокрема захисту даних, забезпечення доступності та відповідності віковим особливостям. Крім того, документ містить приклади застосування ГШІ у навчанні й наукових дослідженнях, які можуть бути використані для розроблення змісту навчальних завдань у концептуальній моделі.

Проаналізуємо рівень інтеграції практичних та етичних норм використання ГШІ у зазначених рамках DigComp 2.2. та UNESCO (таблиця 1).

Таблиця 1. Аналіз повноти змісту рамок DigComp 2.2. та UNESCO щодо інтеграції ГШІ в практику

Аспект	Де вже присутній	Що потребує доповнення
Знання про основи ШІ / принципи роботи моделей та алгоритмів.	DigComp 2.2 – приклади навичок; UNESCO – рамка.	Структуровані знання про принципи роботи моделей, обмеження, потенційні упередження та ризики.
Етичні аспекти, безпека та конфіденційність.	DigComp 2.2 – згадування етики та ГШІ; UNESCO – рамки та рекомендації Action Plan ЕС.	Практичні кейси використання етичних принципів, методи оцінювання ризиків і безпечного застосування ГШІ.
Навички використання ШІ (інструменти, створення запитів, інтерактивні додатки)	DigComp 2.2. – частково; UNESCO – не передбачено.	Включення у навчальні плани та рамки компетентностей, розроблення практичних завдань і вправ.
Критичне мислення щодо ШІ: аналіз упереджень, обмежень, маніпуляцій	DigComp 2.2 – приклади; European Commission – рекомендації.	Розробка навчальних завдань і методичних матеріалів для формування навичок критичного аналізу та оцінки результатів ШІ.
Використання ШІ у навчанні / педагогічній практиці	UNESCO – рамка; UNESCO – приклади практик.	Інтеграція передового досвіду, адаптація до предметів та методологій, добірка інструментів і методів для ефективного застосування в класі.

Джерело: авторська розробка.

Основною проблемою інтеграції ГШІ залишається недостатній рівень науково-методичного забезпечення, обмежена добірка ефективних підходів до його використання та відсутність відпрацьованих методів оцінювання ШІ-систем у навчанні та розвитку ІЦК учасників освітнього процесу. Разом із тим, дослідження вітчизняних і зарубіжних учених, а також оновлені рамки цифрової компетентності підтверджують необхідність застосування ГШІ як інструменту формування та розвитку зазначеної компетентності, що охоплює навички від формулювання запитів до критичної оцінки результатів.

Враховуючи ці виклики та наукові підходи, необхідне системне бачення інтеграції генеративного ШІ у процес розвитку інформаційно-цифрової компетентності учнів. У цьому контексті пропонується концептуальна модель (Рис. 1), яка відображає ключові складники та взаємозв'язки процесу: цільовий, суб'єктно-об'єктний, змістовий, технологічний, етичний та результативно-оцінювальний.



Рис. 1. Концептуальна модель інтеграції генеративного штучного інтелекту у процес розвитку інформаційно-цифрової компетентності учнів рівня базової середньої освіти

Джерело: авторська розробка.

Цільовий складник моделі характеризується спрямованістю на формування та розвиток інформаційно-цифрової компетентності учнів, підготовку до роботи з ГШІ-системами, розвиток критичного мислення та цифрової етики.

У межах цільового блоку визначаються *завдання*, спрямовані на поетапне забезпечення досягнення мети:

- (1) ознайомлення учнів з принципами роботи ГШІ та його функціональними можливостями;
- (2) формування вміння формувати чіткі та коректні запити (промпти);
- (3) розвиток навичок критичного аналізу та оцінки отриманої інформації;
- (4) виховання усвідомленого та етичного ставлення до використання цифрових інструментів.

Цільовий складник також визначає педагогічні орієнтири та стандарти освітньої діяльності, що забезпечують відповідність моделі вимогам базової середньої освіти, зокрема формуванню однієї з ключових компетентностей учнів – інформаційно-цифрової. Він закладає логічну основу для інших блоків моделі, формуючи зв'язок між освітніми цілями, організаційно-педагогічними заходами та очікуваними результатами навчання.

Суб'єктно-об'єктний складник моделі передбачає уявлення освітнього процесу як системи взаємодії між *суб'єктами* (активними учасниками) та *об'єктами* (цифровими й технологічними інструментами) (таблиця 2).

Таблиця 2. Елементи суб'єктно-об'єктного складника моделі

Елементи	Опис
Суб'єкти	<p>Учні – основні користувачі ШІ-інструментів, які розвивають навички самонавчання, критичного мислення та цифрової грамотності.</p> <p>Вчителі – фасилітатори і модератори освітнього процесу, які інтегрують ГШІ для персоналізації завдань, оцінювання та підтримки різних стилів навчання.</p> <p>Батьки – партнери освітнього процесу, що здійснюють контроль і формують етичні орієнтири використання технологій дітьми.</p> <p>Адміністрація – стратегічні менеджери освітнього середовища, відповідальні за політики, впровадження та моніторингу ефективності цифрових інновацій.</p> <p>ІТ-спеціалісти – технічні модератори, які забезпечують інфраструктуру, кібербезпеку та адаптацію платформ до потреб користувачів.</p>
Об'єкти	<p>ГШІ-моделі (ChatGPT, Gemini, Claude тощо) – інтелектуальні агенти, що виконують функції автоматизації, генерації знань, створення адаптивних сценаріїв навчання.</p> <p>Цифрові освітні ресурси (електронні бібліотеки, онлайн-курси, інтерактивні матеріали) – база для поглиблення знань і формування дослідницької компетентності.</p> <p>Освітні платформи (Moodle, Google Classroom, Edmodo) – організаційні середовища для комунікації, спільної роботи та моніторингу прогресу.</p> <p>Інноваційні сервіси (віртуальні лабораторії, навчальні симулятори, адаптивні тьютори) – інструменти для розширення можливостей досвіду та практичного навчання.</p>

Джерело: авторська розробка.

Збалансована взаємодія суб'єктів та об'єктів у цифровому середовищі є умовою етичного та ефективного впровадження ГШІ. Суб'єктно-об'єктний складник дозволяє вибудувати цілісну модель освітньої взаємодії, де технології не замінюють людину, а виступають «партнерами» у спільному творенні знань, забезпечуючи баланс між інноваціями та гуманістичними цінностями освіти.

Змістовий складник моделі спрямований на інтеграцію ГШІ в навчальні програми (створення, редагування, аналіз текстів, зображень, моделей), використання його у міждисциплінарних проєктах, STEM/STEAM-освіті, цифровій творчості, а також на впровадження освітніх інновацій (мобільні застосунки, AR/VR/MR, гейміфікація, адаптивні платформи). Ключовою метою цього складника є створення нового освітнього контенту та трансформація традиційних навчальних підходів відповідно до викликів цифрової ери.

По-перше, застосування ГШІ дозволяє розширити можливості роботи з навчальними матеріалами: від автоматизованого створення й редагування текстів, аналізу та узагальнення інформації до генерації зображень, моделей і візуалізацій, що сприяють кращому розумінню складних понять. Це не лише полегшує доступ до навчальних ресурсів, але й стимулює розвиток навичок критичного осмислення контенту та його творчої адаптації.

По-друге, змістовий складник підкреслює роль генеративного ШІ у міждисциплінарних проєктах, що інтегрують гуманітарні та природничо-наукові знання. Використання ШІ у STEM та STEAM-освіті створює умови для залучення учнів до дослідницьких і практико орієнтованих завдань, де поєднуються програмування, дизайн, мистецтво та науковий експеримент. У такому середовищі ГШІ виступає як інструмент інтеграції різних галузей знань і стимулювання колективної роботи.

По-третє, у фокусі цього складника перебуває розвиток цифрової творчості. Учні отримують можливість реалізувати індивідуальні та групові творчі проєкти за допомогою інноваційних сервісів – від візуального мистецтва до створення інтерактивних медіапродуктів. ГШІ відкриває простір для індивідуалізації освітнього досвіду, дозволяючи учням обирати форми та інструменти для вираження власних ідей.

Змістовий складник таким чином відображає багатовекторний підхід до оновлення змісту освіти: він поєднує когнітивний, творчий та технологічний виміри навчання, спрямовуючи освітній процес на формування цілісної ІЦК учнів.

Методичний складник моделі характеризується застосуванням педагогічних стратегій (проблемно-орієнтоване, проєктне, колективне навчання), методик формування навичок створення запитів до ГШІ, а також методів оцінювання (автоматизовані тести, аналіз прогресу, самооцінювання й взаємооцінювання).

Педагогічні стратегії формують основу використання ГШІ у класі. Проблемно-орієнтоване навчання спрямовує учнів на пошук рішень для реальних завдань за допомогою генеративних інструментів, стимулюючи розвиток критичного

мислення та дослідницьких навичок. Проектне навчання забезпечує інтеграцію ГШІ у міждисциплінарні проекти, де учні використовують його для створення контенту, аналізу даних чи моделювання, тим самим формуючи практико-орієнтовані компетентності. Колективне навчання, підсилене цифровими сервісами, дозволяє організувати співпрацю учнів у розв'язанні складних завдань, сприяючи формуванню комунікативних і соціальних навичок у цифровому середовищі.

Другим важливим аспектом є методики формування навичок створення запитів до ГШІ (prompt engineering). Учням необхідно навчатися коректно формулювати інструкції та питання, аби досягати релевантних і етичних відповідей. Це розвиває не лише технічні компетентності, а й когнітивну гнучкість, уміння ставити уточнювальні питання та критично аналізувати отримані результати.

Методи оцінювання навчальних досягнень трансформуються завдяки інтеграції ГШІ. Автоматизовані тести та системи аналізу прогресу дозволяють здійснювати швидкий і персоналізований зворотний зв'язок. Самооцінювання та взаємооцінювання, підтримані цифровими платформами, розвивають рефлексивність, відповідальність за власне навчання та вміння конструктивно аналізувати роботу інших. Використання ГШІ для формувального оцінювання створює нові можливості для діагностики сильних і слабких сторін учнів, сприяючи побудові індивідуальних освітніх траєкторій.

Таким чином, методичний складник визначає педагогічні умови інтеграції генеративного ШІ у навчання. Він забезпечує гармонійне поєднання інноваційних технологій з перевіреними дидактичними підходами, що дозволяє перетворити цифрові інструменти на ефективних «партнерів» у розвитку компетентностей та формуванні навчальної автономії учнів.

Організаційний складник моделі передбачає формування політики цифрової трансформації школи, забезпечення доступності та безпеки цифрових середовищ, налагодження співпраці з ІТ-компаніями, університетами та освітніми стартапами.

Цей складник окреслює управлінські, інфраструктурні та партнерські умови, необхідні для ефективної інтеграції ГШІ в освітній процес. Він визначає політику, механізми та ресурси, що забезпечують сталість цифрової трансформації та сприяють розвитку ІЦК учнів:

- формування політики цифрової трансформації школи передбачає, що адміністрація має розробляти стратегічні документи, які регламентують використання генеративних моделей, визначають принципи академічної доброчесності, етичні норми та орієнтири безпечної взаємодії з технологіями. Така політика має узгоджуватися з національними освітніми стандартами та глобальними рекомендаціями, сприяючи цілеспрямованому й системному впровадженню цифрових інновацій;

- забезпечення доступності та безпеки цифрових середовищ передбачає розвиток інфраструктури (інтернет-з'єднання, сервери, навчальні платформи), впровадження систем кіберзахисту та захисту персональних даних, а також створення умов рівного доступу для всіх учнів незалежно від соціально-економічних факторів. Організаційний складник у цьому аспекті покликаний мінімізувати цифрову нерівність та гарантувати інклюзивність цифрової освіти;

- налагодження партнерської взаємодії з ІТ-компаніями, університетами та освітніми стартапами передбачає трансфер знань, залучення інноваційних рішень і створення спільних проектів, що розширюють освітній простір. Університети можуть виступати науково-методичними центрами, ІТ-компанії – технологічними провайдерами, а стартапи – джерелом креативних освітніх рішень. Цей трикутник взаємодії формує відкриту освітню екосистему, де школа стає не лише споживачем, але й співтворцем інноваційних практик.

Загалом організаційний складник спрямований на інституціалізацію інтеграції генеративного ШІ, формування цифрової культури школи та забезпечення безперервного розвитку освітнього середовища. Він визначає рамки, у яких відбувається взаємодія всіх учасників освітнього процесу, та забезпечує баланс між технологічними можливостями й соціальною відповідальністю.

Технологічний складник охоплює форми організації освітнього процесу (змішане, мобільне навчання, персоналізовані траєкторії), використання інструментів (чат-боти, віртуальні тьютори та асистенти, симулятори, аналітика навчальних даних) та інтеграцію із системами LMS, е-портфоліо, хмарними середовищами.

Технологічний блок включає вибір засобів та платформ, що забезпечують ефективну реалізацію моделі: інтеграція засобів ГШІ для створення текстів, зображень та відео (до прикладу, ChatGPT, MC Copilot, MidJourney, DALL E 3, Imagen, Video Studio AI, Adobe Firefly тощо); цифрові платформи для презентацій (Google Slides, Canva, Gamma тощо) і спільної роботи (Google Workspace (Docs, Sheets, Slides, Meet), Microsoft 365 (Teams, Word, Excel, PowerPoint, OneDrive), Slack, Discord, Miro тощо), а також інструменти для моніторингу і відстеження прогресу учнів (Classtime, Kahoot!, Nearpod, Google Classroom, Moodle тощо). Він формує практичну основу для досягнення результатів, визначених у цільовому блоці, і створює умови для ефективного поєднання навчальних стратегій та цифрових технологій.

Етичний складник моделі має багатомірний характер і визначає ціннісні орієнтири, що регулюють використання технологій ГШІ в освітньому середовищі. Він спрямований на формування в учнів здатності не лише опанувати цифрові інструменти, а й критично осмислювати наслідки їхнього застосування. У центрі цього складника перебуває цифрова етика, що передбачає дотримання принципів академічної доброчесності, норм авторського права, захисту персональних даних та розвиток відповідального використання ШІ.

Етичний складник поєднує нормативно-правові, моральні та освітні аспекти. Він не лише задає рамки допустимого використання технологій, але й формує у школярів нову культуру цифрової взаємодії, що ґрунтується на чесності, відповідальності та повазі до прав інших. Саме ця основа дозволяє зробити процес цифрового навчання не лише ефективним, а й соціально безпечним та ціннісно орієнтованим.

Результативно-оцінювальний складник характеризується визначенням критеріїв оцінювання сформованості ІЦК, моніторингом навчальних досягнень і рівня цифрової грамотності, розвитком критичного ставлення до результатів роботи з ГШІ (таблиця 3).

У цей елемент моделі закладаємо оцінювання, самооцінювання та взаємооцінювання результатів; формування навичок рефлексії щодо меж і доцільності використання ГШІ. Поряд з вчительським оцінюванням, самооцінювання та

взаємооцінювання результатів забезпечують розвиток метакогнітивних умінь: учні не лише аналізують рівень власних досягнень, а й вчаться адекватно оцінювати результати інших, що сприяє вихованню відповідальності, об'єктивності та конструктивної комунікації в освітньому середовищі.

Таблиця 3. Критерії та показники оцінювання в межах результативно-оцінювального складника моделі

Критерії	Показники оцінювання
Педагогічне оцінювання результатів діяльності учня	<i>Показники (якість роботи учня з генеративним ШІ):</i> – учень формулює зрозумілі та коректні запити; – учень отримує результати, що задовольняють запитам; – учень аналізує отримані відповіді.
Сформованість в учнів умінь самооцінки	<i>Показники:</i> – учень здатний описати власний внесок у виконання завдання; – учень порівнює свої результати з визначеними критеріями успішності; – учень визначає власні сильні сторони та сфери для вдосконалення.
Сформованість в учнів умінь взаємооцінки	<i>Показники:</i> – учень надає аргументовані відгуки на роботу однокласників; – учень виявляє здатність до конструктивної критики, дотримуючись етичних норм; – учень використовує результати взаємооцінки для покращення власних освітніх продуктів.
Рефлексія щодо доцільності використання ШІ	<i>Показники:</i> – учень аргументовано визначає сфери ефективного використання генеративного ШІ; – учень усвідомлює обмеження ШІ та ризики, пов'язані з його застосуванням. – учень вміє окреслити ситуації, коли слід покладатися на власні знання, а не на результати генеративної моделі.
Розвиток критичного мислення та цифрової автономії	<i>Показники:</i> – учень ставить запитання до результатів, отриманих від ШІ, критично аналізує їх; – учень порівнює відповіді ШІ з іншими джерелами інформації; – учень демонструє здатність приймати самостійні рішення на основі аналізу кількох джерел.

Джерело: авторська розробка.

Запропоновані критерії та показники можуть стати в нагоді вчителям у процесі оцінювання рівня сформованості умінь учнів, простежувати, як учні переходять від поверхневого використання ШІ до його усвідомленого, етичного та автономного застосування.

Результативно-оцінювальний складник моделі виступає педагогічним механізмом, що поєднує оцінювання, самооцінювання, взаємооцінювання, рефлексію, створюючи умови для саморозвитку, критичної автономії та усвідомленого використання ШІ в освітньому процесі.

Інтеграція ГШІ у розвиток ІЦК учнів базової середньої освіти є важливим напрямом модернізації освітнього процесу. Запропонована концептуальна модель забезпечує відповідність європейським та міжнародним рамкам компетентності; враховує ризики і можливості використання ШІ; сприяє формуванню критичного, творчого й етичного мислення учнів.

Концептуальна модель передбачає такі рівні інтеграції ГШІ в базовій середній освіті (Lytvynova et al., 2024):

1. Рівень учня

– ГШІ підтримує персоналізовані освітні траєкторії, враховуючи темп навчання, рівень підготовки та стиль сприйняття інформації, що сприяє формуванню ІЦК;
– використовуються чат-боти, системи рекомендацій, адаптивні тести для розвитку навичок роботи з інформацією та цифрових інструментів;
– забезпечується індивідуалізація навчання: учні отримують завдання, ресурси та пояснення, що відповідають їхнім здібностям і потребам, формуючи критичне мислення і здатність оцінювати результати роботи ГШІ.

2. Рівень учителя

– ШІ виступає інноваційним інструментом підтримки, допомагаючи аналізувати прогрес кожного учня, формувати індивідуальні плани навчання та рекомендувати додаткові матеріали, що безпосередньо сприяє розвитку ІЦК учнів;
– зменшує рутинне навантаження, дозволяючи зосередитися на творчій та виховній роботі та методичному супроводі розвитку цифрових компетентностей;
– виклики: потреба у власній цифровій компетентності, усвідомлене використання ШІ, етичні питання, які вчитель повинен враховувати при інтеграції технологій у навчання.

3. Рівень управління

– на основі аналітики ГШІ можливе прогнозування освітніх результатів, виявлення ризику неуспішності та корекція програм, що підтримує формування ІЦК у ширшому колективі учнів;

– підтримка прийняття управлінських рішень щодо організації освітнього процесу, забезпечення ресурсами для розвитку цифрової компетентності учнів і педагогів.

4. Суспільний та етичний рівень

– використання ГШІ в індивідуалізації навчання піднімає питання рівного доступу, безпеки даних, запобігання алгоритмічній упередженості та розвитку відповідального ставлення до цифрових технологій;

– потрібне вироблення норм і політик на рівні держави для забезпечення етичного та безпечного використання ГШІ, що формує у суспільстві базові інформаційно-цифрові компетентності.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Проведений аналіз засвідчує, що інтеграція генеративного штучного інтелекту в освітній процес закладів загальної середньої освіти є вагомим чинником розвитку інформаційно-цифрової компетентності учнів, формування навичок безпечної, етичної та критично обґрунтованої взаємодії новітніми технологіями. Залучення ГШІ надає можливість: 1) персоналізувати освітні траєкторії відповідно до рівня підготовки та потреб учнів; 2) сприяти розвитку критичного мислення, цифрової грамотності та етики; 3) розширювати зміст навчання за рахунок міждисциплінарних проєктів, цифрової творчості та інноваційних методів; 4) підвищувати ефективність педагогічної діяльності та управління освітнім середовищем.

Обґрунтовано концептуальну модель інтеграції генеративного ШІ у процес розвитку інформаційно-цифрової компетентності учнів закладів базової середньої освіти, що є системною та багатовимірною, оскільки охоплює вісім складників: цільовий, суб'єктно-об'єктний, змістовий, технологічний, методичний, організаційний, етичний, результативно-оцінювальний. Реалізація запропонованої моделі сприятиме формуванню в учнів навичок критичного мислення, цифрової творчості, міждисциплінарної взаємодії та відповідального використання ШІ, а також створюватиме умови для партнерства ЗЗСО з ІТ-сектором та іншими освітніми та науковими установами. Модель може стати методологічною основою для розробки навчальних програм, цифрових освітніх середовищ і стратегій розвитку цифрової компетентності на рівні закладу освіти. Важливим компонентом моделі є визначення критеріїв (педагогічне оцінювання результатів діяльності учня, сформованість умінь самооцінки, сформованість умінь взаємооцінки, рефлексія щодо доцільності використання ШІ, розвиток критичного мислення та цифрової автономії) та показників оцінювання інформаційно-цифрової компетентності учнів рівня базової середньої освіти.

У перспективі подальші дослідження можуть бути зосереджені на емпіричній перевірці моделі у різних типах ЗЗСО (міських, сільських, спеціалізованих) для виявлення ефективності та адаптивності, дослідженні етичних аспектів застосування ГШІ у загальній середній освіті, зокрема питань академічної доброчесності, авторства та безпеки даних.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів.

ФІНАНСУВАННЯ

Дослідження виконане в межах «Комплексного наукового дослідження використання генеративного штучного інтелекту на різних рівнях освіти для удосконалення педагогічних та управлінських практик», що виконується за рахунок бюджетних коштів, спрямованих на забезпечення проведення державними науковими установами наукових досліджень і науково-технічних (експериментальних) розробок за результатами державної атестації згідно договору № БФ/ С12–2025 про виконання наукового дослідження, яка за результатами державної атестації за науковим напрямом «Суспільний» віднесена до групи А.

ДОСТУПНІСТЬ ДАНИХ

Це дослідження не передбачало використання окремих наборів даних.

ВИКОРИСТАННЯ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Використано ChatGPT для поліпшення якості мови, перевірка граматики. Авторі критично перевірили та відредагували отриманий контент і несуть повну відповідальність за його зміст.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ (REFERENCES)

1. Annappureddy, R., Fornaroli, A., & Gatica-Pérez, D. (2025). Generative AI literacy: Twelve defining competencies. *Digital Government: Research and Practice / ACM*, 6, 1(13), 1-21. <https://doi.org/10.1145/3685680>
2. Ateş, H., & Gündüzalp, C. (2025). Proposing a conceptual model for the adoption of artificial intelligence by teachers in STEM education. *Interactive Learning Environments*, 10, 1-27. <https://doi.org/10.1080/10494820.2025.2457350>
3. Casal-Otero, L., Cataka, A., Fernando-Morante, C., Taboada, M., Cebreiro, B., & Barro, S. (2023). AI literacy in K-12: A systematic literature review. *International Journal of STEM Education*, 10, 29. <https://doi.org/10.1186/s40594-023-00418-7>
4. Cheah, Y. H., Lu, J., & Kim, J. (2025). Integrating generative artificial intelligence in K-12 education: Examining teachers' preparedness, practices, and barriers. *Computers and Education: Artificial Intelligence*, 8, 100363. <https://doi.org/10.1016/j.caeai.2025.100363>
5. Guidance for generative AI in education and research. (2023). In *UNESCO eBooks*. <https://doi.org/10.54675/ewzm9535>
6. Heintz, F., (2021). Three interviews about K-12 AI education in America, Europe, and Singapore. *KI – Künstliche Intelligenz*, 35(2), 233-237. <https://doi.org/10.1007/s13218-021-00730-w>
7. Holmes, W., & Porayska-Pomsta, K. (Eds.). (2022). *The ethics of artificial intelligence in education: Practices, challenges, and debates*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780429329067>

8. Holmes, W., Porayska-Pomsta, K., et al. (2021). Ethics of AI in education: Towards a community-wide approach. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, 32, 504-526. <https://doi.org/10.1007/s40593-021-00239-1>
9. Jiang, B., Dai, J., Zhou, A., Dong, X., Liu, X., Hong, D., Jiang, F., Zheng, L., Zhao, J., Zhang, H., Liu, Y., & Yuan, Z. (2023). Artificial Intelligence Curriculum Guidelines for Primary and Secondary Schools. *Journal of East China Normal University (Educational Sciences)*, 41(3), 121-134. <https://doi.org/10.16382/j.cnki.1000-5560.2023.03.013>
10. Kamali, J., Alpat, M. F., & Bozkurt, A. (2024). AI ethics as a complex and multifaceted challenge. *International Journal of Educational Technology in Higher Education*, 21, 62. <https://doi.org/10.1186/s41239-024-00496-9>
11. Lytvynova, S., Vodopian, N., & Syssoeva, O. (2024). Artificial intelligence in secondary education: An innovative teacher's tool to ensure individualised learning for students. In *New media pedagogy: Research trends, methodological challenges, and successful implementations* (pp. 393-412). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-63235-8_26
12. Micheuz, P. (2020). Approaches to artificial intelligence as a subject in school education. In T. Brinda, D. Passey, & T. Keane (Eds.), *Empowering teaching for digital equity and agency. OCCE 2020. IFIP Advances in Information and Communication Technology* (Vol. 595). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-59847-1_1
13. Owoeye, G. (2024). The influence of artificial intelligence on employment trends in the United States (US). *International Journal of Innovative Science and Research Technology*, 9(6), 1368-1372. <https://doi.org/10.38124/ijisrt/ijisrt24jun328>
14. Touretzky, D., Gardner-McCune, C., Breazeal, C., Martin, F., & Seehorn, D. (2019). A year in K-12 AI education. *AI Magazine*, 40(4), 88-90. <https://doi.org/10.1609/aimag.v40i4.5289>
15. Van Audenhove, L., Vermeire, L., Van den Broeck, W., & Demeulenaere, A. (2024). Data literacy in the new EU DigComp 2.2 framework: How DigComp defines competences on artificial intelligence, internet of things, and data. *Information & Learning Sciences*, 125 (5-6): 406-436. <https://doi.org/10.1108/ILS-06-2023-0072>
16. Vuorikari, R., Kluzer, S., & Punie, Y. (2022). DigComp 2.2: The digital competence framework for citizens – With new examples of knowledge, skills and attitudes (EUR 31006 EN). Publications Office of the European Union. <https://doi.org/10.2760/115376>
17. Wang, S., Wang, F., Zhu, Z., Wang, J., Tran, T., & Du, Z. (2024). Artificial intelligence in education: A systematic literature review. *Expert Systems with Applications*, 252(Part A), 124167. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2024.124167>
18. Zhou, X., & Schofield, L. (2024). Developing a conceptual framework for artificial intelligence (AI) literacy in higher education. *Journal of Learning Development in Higher Education*, 31. <https://doi.org/10.47408/jldhe.vi31.1354>
19. UNESCO. (2024a). *AI competency framework for teachers*. Publications Office. <https://doi.org/10.2766/153756>
20. UNESCO. (2024b). *AI competency framework for students*. UNESCO. <https://doi.org/10.54675/JKJB9835>

| Матеріал надійшов до редакції: 28.08.2025 р. | Прийнято до друку: 14.10.2025 р. | Опубліковано: 28.11.2025 р. |



ДИСТАНЦІЙНИЙ ПРАКТИКО-ОРІЄНТОВАНИЙ КУРС «3D-ГРАФІКА»: ВИКЛИКИ І ПЕРСПЕКТИВИ ВПРОВАДЖЕННЯ

Наталія ПАВЛОВА

Рівненський державний гуманітарний університет, Україна
nataliia.pavlova@rshu.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0002-7817-6781>

Катерина ДУБИЧ ✉

Рівненський державний гуманітарний університет, Україна
kateryna.muzychuk@rshu.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0002-4360-1530>

DISTANCE LEARNING PRACTICAL COURSE «3D GRAPHICS»: CHALLENGES AND PROSPECTS FOR IMPLEMENTATION

Natalia PAVLOVA

Rivne State University of Humanities, Ukraine
nataliia.pavlova@rshu.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0002-7817-6781>

Kateryna DUBYCH ✉

Rivne State University of Humanities, Ukraine
kateryna.muzychuk@rshu.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0002-4360-1530>

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. Майбутні вчителі інформатики та фахівці ІТ, навчаючись у ЗВО, повинні здобути компетентності, що розкривають їх здатність і готовність ефективно використовувати засоби комп'ютерної графіки у професії. Доцільно у зміст освітньо-професійних програм розміщувати освітні компоненти, вивчення яких спрямоване на вироблення навичок роботи з інструментами тривимірної графіки, моделювання, анімації й дизайну. Реалізація діяльнісного підходу у поєднанні з оновленням програмних засобів зумовлює необхідність розробки дистанційного курсу як практико-орієнтованого ресурсу.

Методи та матеріали. Аналіз науково-методичних праць з комп'ютерної графіки; виокремлення ключових рекомендацій з розроблення і впровадження дистанційного курсу як практико-орієнтованого ресурсу; спостереження, опитування і представлення власного педагогічного досвіду.

Результати. Запропоновано шляхи подолання основних викликів з вивчення 3D-графіки, проаналізовано окремі аспекти розробки та впровадження дистанційного практико-орієнтованого курсу, що поєднує інструкційний, інформаційний, контролюючий, комунікативний складники. Навчальні модулі курсу представлено як систему лабораторних (практичних) занять, кожне з яких містить: формулювання завдання; інструкційні матеріали; діяльнісну частину; підсумкову рефлексію. Візуалізація результатів опитування здобувачів освіти та узагальнення власного педагогічного досвіду дозволили розкрити виклики і перспективи впровадження дистанційного курсу у процес професійної підготовки майбутніх фахівців.

Висновки. Ключовими викликами освітнього процесу є питання технічного і програмного забезпечення, дотримання принципів індивідуального й диференційованого підходу, впровадження активного і практико-орієнтованого навчання. Навчальні модулі дистанційного курсу є сукупністю лабораторних (практичних) робіт, що містять варіативні, компетентнісні завдання професійного спрямування. Ефективність освітнього процесу підсилюється застосуванням технології BYOD. Вивчення програмного середовища Blender 3D є доцільним з огляду на його багатофункціональність, доступність та переваги у процесі роботи з ним.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: 3D-графіка; дистанційний курс; комп'ютерна графіка; здобувач вищої освіти; професійна підготовка.

ABSTRACT

Formulation of the problem. Future computer science teachers and IT specialists studying at higher education institutions must acquire competencies that reveal their ability and readiness to effectively use computer graphics tools in their profession. It is advisable to include educational components in the content of educational and professional programs, the study of which is aimed at developing skills in working with three-dimensional graphics, modelling, animation and design tools. The implementation of an activity-based approach in combination with the updating of software tools necessitates the development of a distance learning course as a practice-oriented resource.

Materials and methods. Analysis of scientific and methodological works on computer graphics; identification of key recommendations for the development and implementation of a distance learning course as a practice-oriented resource; observation, questioning, and presentation of personal teaching experience.

Results. Ways to overcome the main challenges in studying 3D graphics are proposed, and individual aspects of developing and implementing a distance practice-oriented course that combines instructional, informational, control, and communicative components are analyzed. The course modules are presented as a system of laboratory (practical) classes, each of which contains: task formulation, instructional materials, an activity part, and a final reflection. Visualization of the survey results and generalization of our own pedagogical experience enabled us to identify the challenges and prospects of implementing a distance learning course in the professional training of future specialists.

Conclusions. The key challenges of the educational process are issues of technical and software support, adherence to the principles of an individual and differentiated approach, and the introduction of active and practice-oriented learning. The training modules of the distance learning course comprise a set of laboratory (practical) works that contain variable, competence-based tasks of a professional nature. The effectiveness of the educational process is enhanced by the use of BYOD technology. Learning the Blender 3D software environment is advisable given its versatility, accessibility, and advantages in the process of working with it.

KEYWORDS: 3D graphics; distance learning course; computer graphics; higher education applicant; professional training.

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Павлова Н., Дубич К. Дистанційний практико-орієнтований курс «3D-графіка»: виклики і перспективи впровадження. *Фізико-математична освіта*, 2025. Том 40. № 5. С. 53-60. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i5-07>.

FOR CITATION: Pavlova, N., & Dubych, K. (2025). Distance learning practical course «3D Graphics»: challenges and prospects for implementation. *Physical and Mathematical Education*, 40(5), 53-60. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i5-07>.

ВСТУП

Постановка проблеми. Одним із ключових завдань закладу вищої освіти (ЗВО) є формування компетентного фахівця, який володіє здатністю і готовністю ефективно працювати із сучасними інформаційними технологіями. У контексті професійної діяльності вчителя інформатики чи фахівця з інформаційних технологій особливого значення набувають вміння використовувати сучасне програмне забезпечення, зокрема інструменти тривимірної графіки, застосунки моделювання, анімації й дизайну. Відповідно, у змісті освітньо-професійних програм (ОПП) варто розміщувати такі освітні компоненти як «Основи комп'ютерної графіки та дизайну», «3D-моделювання та візуалізація», «Анімація та цифровий контент», «Проектна діяльність з використанням 3D-інструментів» та суміжні з ними. З урахуванням діяльнісного підходу до навчання і динамічного оновлення програмного забезпечення, науково-педагогічним працівникам необхідно приділяти увагу не лише змістовому наповненню відповідних дисциплін, а також їх методичному та технологічному забезпеченню. У цьому аспекті актуальним є розробка дистанційних курсів як практико-орієнтованих ресурсів, що забезпечують інтерактивність, доступність та ефективність освітнього процесу.

Аналіз актуальних досліджень. Питання вивчення комп'ютерної графіки та відповідного програмного забезпечення у ЗВО є актуальним упродовж останніх років. Це зумовлено розвитком інформаційних технологій, зростанням попиту на фахівців, здатних працювати із інструментами тривимірного моделювання, візуалізації й анімації. Розробку навчально-дидактичного забезпечення, а також дослідження особливостей його застосування в освітньому процесі здійснювали як вітчизняні, так і зарубіжні науковці.

Так, Н. Гнедко (2025) проаналізувала стан і перспективи підготовки здобувачів вищої освіти до використання растрової й векторної графіки у професійній діяльності. S. J. Al-Nawaiseh, W. J. Alkasasbeh (2025) дослідили, що впровадження в освітні програми дисциплін з вивчення комп'ютерної графіки у ЗВО сприяє ефективному розвитку візуальних, когнітивних та креативних навичок. Натомість «гармонійне поєднання традиційних технологій графічної підготовки і сучасних технологій навчання» позитивно впливають на розвиток просторової уяви сучасного інженера конструктора під час вивчення 3D-моделювання (Савельєва & Пустового, 2021). І. Твердохліб й А. Деркач (2024) зосереджуються на комплексному вивченні 3D-моделювання в умовах змішаного навчання у закладах загальної середньої освіти та виокремлюють у цьому процесі такі труднощі: забезпечення технічної підтримки, розробка методичних матеріалів, добір мотиваційних чинників. Отримані висновки близькі до результатів дослідження G. Kushiator, M. Adashie, B. Ayim, I. Y. Klodzi (2023), які акцентують свою увагу на діяльнісному підході застосування цифрових технологій під час вивчення комп'ютерної графіки учнями старшої школи.

Реалізація 3D-проектів вимагає застосування спеціалізованого програмного забезпечення, різноманіття якого відкриває широкі можливості для урізноманітнення освітнього процесу. Дослідники по-різному підходять до визначення найбільш доцільних інструментів. Аналізуючи програмні застосунки за функціональними можливостями, сферою застосування і складністю опанування, вчені підкреслюють, що «вибір конкретного графічного редактора має здійснюватися з урахуванням цілей навчання здобувачів вищої освіти певної спеціальності та їхнього досвіду роботи в галузі 3D-моделювання» (Пазюк та ін., 2024). О. О. Mosiuk, Y. B. Sikora, O. Yu. Usata. (2023) як проблемний момент виділяють «сприйняття учнями складних інтерфейсів відповідного графічного програмного забезпечення» та наводять практичні рекомендації щодо вивчення тривимірної графіки у шкільному курсі інформатики. У свою чергу, О. Мосіук (2018) у контексті підготовки вчителів інформатики акцентує на доцільності використання програми Blender 3D, наводить приклад змістового наповнення однойменного курсу. Також учений наголошує на розробці навчально-методичних комплексів, доборі методів вивчення 3D-технологій з урахуванням різних форм організації освітнього процесу. У процесі підготовки бакалаврів комп'ютерних наук Н. Chemerys, K. Osadcha, V. Osadchyi, V. Kruhlyk (2019) пропонують використовувати 3D-графічний процесор Autodesk Maya та під час вивчення комп'ютерної графіки роблять акцент на моделюванні об'єктів органічної форми на прикладі створення ігрових персонажів та оточення.

Аналіз вищезгаданих досліджень дає підстави стверджувати, що напрями вивчення 3D-графіки з використанням різних форм навчання залишається недостатньо дослідженою, при цьому особливої уваги потребує розроблення і впровадження в процес професійної підготовки майбутніх фахівців дистанційних курсів практико-орієнтованого спрямування.

Мета статті – обґрунтування теоретико-методичних засад і практичних рекомендацій щодо розробки та впровадження дистанційного курсу з 3D-графіки як складової професійної підготовки майбутніх педагогів та фахівців з інформаційних технологій.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Використано: аналіз науково-методичних праць щодо 3D-технологій як об'єктів вивчення й інструментів діяльності; узагальнення й систематизація рекомендацій з питань розробки і впровадження дистанційного курсу як практико-орієнтованого ресурсу; спостереження й опитування з метою визначення ефективності впровадження курсу у процес професійної підготовки майбутніх фахівців. Експериментальна база дослідження була зосереджена на факультеті математики та інформатики Рівненського державного гуманітарного університету (РДГУ), а саме серед здобувачів вищої освіти спеціальностей «Середня освіта (Інформатика)» та «Професійна освіта (Цифрові технології)», які у вибірковому циклі освітніх компонент обрали для вивчення дисципліну «3D-графіка».

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Компетентності щодо роботи з сучасними графічними інструментами, як зазначає Н. Гнедко, визначають рівень готовності здобувача освіти «працювати у висококонкурентному цифровому середовищі» (Гнедко, 2025). Розуміння можливостей інноваційних технологій візуалізації віртуальних і реальних об'єктів, а також масштабів їх застосування, розширює умови впровадження зазначених технологій в освітній процес (Барановська & Барановський, 2024). На думку вчених, тривимірні технології можуть застосовуватися у різних спеціальностях – від мистецьких до технічних і тому можливий перехід від вивчення базових концепцій 3D-графіки до міждисциплінарного підходу, розширення сфери їх застосування шляхом упровадження в різні галузі. Технології тривимірної графіки розвивають у здобувачів вищої освіти не лише технічні навички, а й широке коло когнітивних, творчих здібностей. Важливими є також точність, уважність до окремих елементів, естетичне сприйняття результату, здатність пояснювати технічні аспекти моделі у процесі командної роботи над 3D-проєктом.

Аналіз чинних освітніх програм з інформатики для закладів загальної середньої освіти засвідчив упровадження тривимірного моделювання як обов'язкової складової навчального плану та як факультативного курсу (Освітні програми, 2025). У цьому контексті майбутній педагог має володіти знаннями про комп'ютерну графіку, орієнтуватися у програмному забезпеченні і прогнозувати напрями його застосування. Зазначені вимоги виступають підґрунтям для удосконалення ОПП шляхом упровадження освітніх компонентів, спрямованих на вивчення комп'ютерної графіки, зокрема тривимірного моделювання.

ОПП підготовки майбутніх фахівців містять дисципліни обов'язкового і вибіркового циклу. Перші визначають зміст спеціальності і кваліфікації, яку здобувають студенти, а другі здебільшого логічно продовжують їх вивчення і поглиблюють здобуту обізнаність. Вибір дисциплін із вибіркового циклу ОПП зумовлений пізнавальними здібностями та інтересами здобувачів вищої освіти, а також їхніми потребами й перспективами подальшого професійного розвитку. З метою розширення професійних інтересів здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальностей «Середня освіта (Інформатика)» та «Професійна освіта (Цифрові технології)» у РДГУ пропонується низка вибіркового навчальних дисциплін. Частина з них виступає логічним продовженням обов'язкового компоненти «Комп'ютерна графіка та технології мультимедіа» (рис. 1). Серед вибіркового курсів особливе місце посідає дисципліна «3D-графіка», що сприяє поглибленню знань і практичних умінь студентів у сфері комп'ютерної графіки. Таким чином, здобувачі освіти отримують можливість всебічно розвиватися як у галузі інформаційних технологій загалом, так і у напрямі технологій комп'ютерної графіки зокрема.

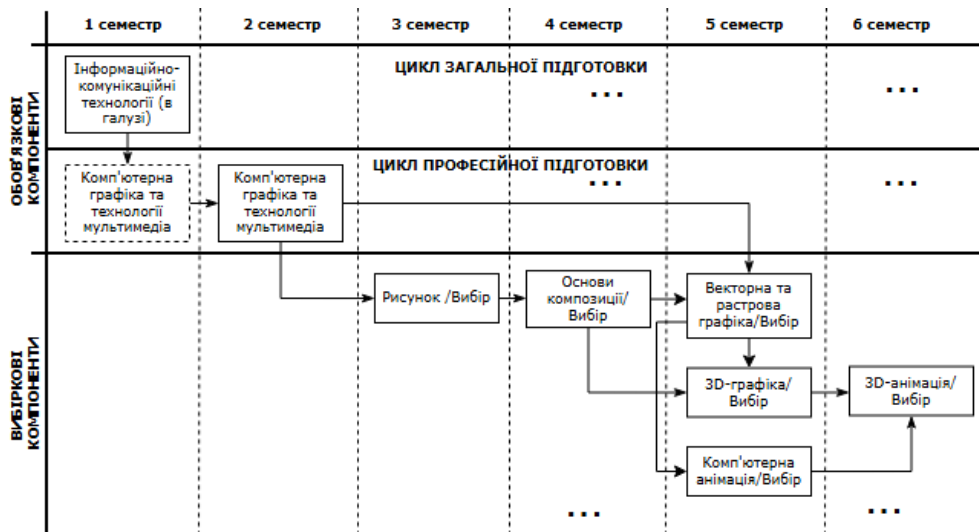


Рис. 1. Міжпредметний зв'язок дисциплін обов'язкового та вибіркового циклів

Джерело: авторська розробка.

Основним програмним забезпеченням, роботу з яким опановують здобувачі освіти в межах дисципліни «3D-графіка», є Blender 3D. Серед його переваг: кросплатформеність (сумісність з операційними системами Windows, Linux, macOS); відкритість і доступність (безкоштовне програмне забезпечення з відкритою ліцензією); зручність (порівняно простий інтерфейс, широкий набір інструментів для вирішення завдань різної складності); навчальна підтримка (наявність навчального контенту (Юрченко та ін., 2022), зокрема українською мовою у відкритому доступі); функціональні можливості (побудова тривимірних об'єктів з використанням 3D-примітивів, редагування полігональної сітки об'єкту, модифікатори, екструджування, робота з матеріалами та текстурами, композитинг сцени, налаштування анімації 3D-сцени); практична затребуваність (попит на фахівців із 3D-моделювання та дизайну на сучасному ринку праці).

На етапі впровадження дисципліни «3D-графіка» в освітній процес викладачі зіштовхуються з низкою організаційних і методичних викликів. Розкриємо зміст окремих з них і можливі шляхи їх вирішення.

Вибір програмного забезпечення є одним із ключових викликів в організації освітнього процесу, оскільки сьогодні існує широкий спектр програм для моделювання тривимірних об'єктів, серед яких користувачі виокремлюють насамперед, комерційні продукти, що потребують придбання ліцензії та безкоштовні – з відкритим доступом. Крім цього, стрімкий розвиток онлайн-середовищ значно розширює можливості використання сучасних інструментів для 3D-

моделювання. На вибір програмного забезпечення впливають кілька ключових чинників: рівень обізнаності викладача, доступність програм у комп'ютерних аудиторіях ЗВО, зацікавленість здобувачів вищої освіти (Пазюк та ін., 2024).

У зв'язку з цим особливого значення набуває процес організації навчання, врахування технічних можливостей та умов освітнього середовища. Поширеним рішенням у ЗВО є використання технології BYOD (Bring Your Own Device або «Принеси свій пристрій»), що надає здобувачам вищої освіти можливість приносити на заняття власні гаджети (ноутбуки, планшети тощо), працювати у комфортних умовах. Такий підхід має низку переваг: збереження студентами результатів роботи на власному засобі; забезпечення кожного студента засобом діяльності; підвищення рівня оволодіння цифровою компетентністю. При цьому, важливо в аудиторії організувати спеціально обладнані робочі місця з можливістю зручного розміщення гаджетів, підключення зарядних пристроїв та доступом до безкоштовного Wi-Fi. Інший спосіб організації освітнього процесу полягає у використанні змішаного формату, коли частина студентів працює в аудиторії, а інші приєднуються дистанційно через сервіси відеозв'язку.

Розробка змісту дисципліни з урахуванням актуальних вимог до підготовки фахівців є важливим етапом організації освітнього процесу. Оскільки дисципліна «3D-графіка» знаходиться у циклі вибіркових дисциплін, відповідно до положення РДГУ на її вивчення відводиться 3 кредити ECTS (Методичні рекомендації, 2024). Це суттєво обмежує кількість аудиторних годин і зумовлює необхідність оптимізації змісту навчання та форм організації занять. У зв'язку з цим доцільно планувати навчання як практико-орієнтоване, наприклад, після ознайомлення студентів із певним інструментом або принципом створення тривимірної моделі рекомендується одразу застосовувати здобуту обізнаність на практиці. Такий підхід дозволяє здобувачам освіти відпрацьовувати навички користування програмними інструментами, створення власних проектів та формування професійного портфоліо.

Описані вище сценарії підкреслюють важливість впровадження змішаної форми організації навчання. У цьому контексті викладач приділяє особливу увагу вибору ресурсу для представлення навчально-методичних матеріалів дисципліни. Ефективним вирішенням цього завдання є дистанційний курс з використанням однієї з систем управління навчанням (LMS Moodle). Дистанційний курс проєктується з метою створення гнучкого й адаптивного освітнього середовища і тому містить «навчально-дидактичний контент, що представлений у різних форматах, заснований як на змістовній так і на комунікативній компоненті» (Войтович & Павлова, 2024).

Дистанційний курс поєднує такі складники: інструкційний (інструкції щодо алгоритму навчання на курсі, виконання лабораторних робіт, підтримки комунікації тощо), інформаційний (лабораторні (практичні) роботи, відеореферати, посібники, новини курсу тощо), контролюючий (звіти про виконання робіт, підсумковий тест тощо), комунікативний (вхідне опитування, рефлексія, консультаційний форум).

Дотримуючись логіки побудови дистанційного курсу, що орієнтується на розвиток практичних умінь кожен навчальний модуль курсу 3D-графіки виглядатиме як сукупність лабораторних (практичних) занять, кожне з яких містить: формулювання завдання (мета роботи, очікувані результати, критерії оцінювання); інструкційні матеріали (покрокові інструкції, ілюстративний матеріал, відеоінструкції (скрінкасти); діяльну частину (виконання завдань у середовищі для 3D-моделювання, проміжні етапи перевірки); підсумкову рефлексію (завантаження виконаного завдання у систему дистанційного навчання, самоконтроль, рефлексія).

Особливої уваги потребує вибір контенту, який повинен бути представлений у різних форматах (текстові відомості, відеофрагменти, презентації, фотографії, малюнки), характеризуватися змістом, інтерактивністю, доступністю. Зазначимо, що розміщення в дистанційному курсі відеоматеріалів потребує застосування спеціальних інструментів середовища. Наприклад, у LMS Moodle для завантаження відеоконтенту варто використати ресурс «URL-вебпосилання», щоб через його відкрите посилання (попередньо відео потрібно розмістити на одній з онлайн платформ, що генерує посилання з доступом публічного використання) опублікувати його на курсі. У результаті, кожен навчальний модуль міститиме багатоматеріальний контент, який не лише інформує здобувачів освіти, а й стимулює їх до активної діяльності.

Не менш важливим у дистанційному курсі є контролюючий складник, що реалізує перевірку досягнень здобувачів вищої освіти. Спираючись на власний досвід, рекомендуємо організувати оцінювання в дистанційному курсі у такий спосіб: поточні звіти – у вигляді діяльностей, що забезпечують можливість надсилання викладачу файлів із виконаними завданнями (діяльність «Завдання»); своєчасність та якість виконання практичної роботи регламентується параметрами налаштування відповідної діяльності; захист робіт – у форматі відеоконференції (діяльність «BigBlueButton», ресурс «URL-вебпосилання») з попереднім оголошенням дати, часу події; підсумковий контроль – у вигляді тестування; банк тестових завдань варто наповнювати запитаннями, що перевіряють володіння інструментарієм програмного середовища, професійною термінологією.

Розробка завдань для лабораторних (практичних) робіт ґрунтується на принципах індивідуалізації і диференційованого підходу, стимулюванні активної навчально-пізнавальної діяльності. За таких умов завдання мають бути варіативними (різного рівня складності), компетентнісними (формулюють вміння, інтегрують знання з різних галузей, орієнтуються на результат), практичними (відображають реальні або наближені до професійних ситуації). Також вони повинні характеризуватися тематичною відповідністю (стосуватися конкретної теми), зрозумілістю і чіткістю формулювань (бути зрозумілими у своєму трактуванні), унікальними (не дублювати одне одного, сприяти різнобічному розвитку здобувачів освіти).

Одним із викликів для викладача, який розробляє дистанційний курс, є добір таких видів навчальної діяльності, що забезпечували б об'єктивну перевірку рівня знань і вмінь здобувачів освіти та при цьому мінімізували ризики порушення принципів академічної доброчесності. Для цього доцільно застосовувати завдання з варіативними умовами виконання, а також визначати вимоги до очікуваного результату. У процесі вивчення тривимірної графіки значна частина навчальних завдань ґрунтується на відтворенні окремої моделі за зразком. Ефективним підходом у такому випадку є супровід завдання фотографією моделі та використання її як орієнтира під час оцінювання виконаних робіт, що дозволяє попередити використання здобувачами 3D-моделей із відкритих інтернет-ресурсів як власних.

У зв'язку з цим перед початком вивчення дисципліни доцільно провести опитування студентів для визначення їхнього рівня обізнаності з відповідним програмним забезпеченням. Так, результати проведеного дослідження були такими: 45,5% респондентів на базовому рівні ознайомлені з програмою Blender 3D; 27,3% студентів мають лише початкові теоретичні уявлення про зазначене програмне забезпечення; ще 27,3% учасників опитування взагалі не знайомі з ним (рис. 2). Такі дані свідчать про необхідність застосування в освітньому процесі диференційованого підходу, наприклад, завдання різної складності – від базових до професійно-орієнтованих.

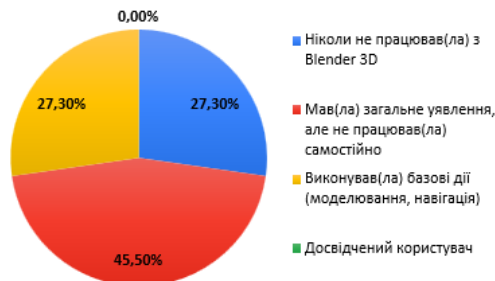


Рис. 2. Результати опитування щодо обізнаності у роботі з Blender 3D

Джерело: авторська розробка.

Оскільки тривимірне моделювання є творчою діяльністю, здобувачам вищої освіти доцільно пропонувати виконувати навчальні проєкти, у межах яких вони проявлятимуть дизайнерські здібності, демонструватимуть набуті знання й навички. Такі завдання розглядаємо як підсумкові. Наприклад, студентам пропонуємо розробити дизайн ізометричної кімнати (рис. 3). Виконання цього проєкту розраховане на чотири лабораторні роботи та передбачає кілька послідовних етапів: побудова каркасу кімнати; створення інтер'єрних об'єктів; моделювання основних елементів інтер'єру; робота з додатковими елементами з використанням відкритих інтернет-ресурсів; налаштування матеріалів і текстур елементів моделі; робота з освітленням і камерами; рендер фінального зображення. Проєктне завдання підсумовує засвоєний матеріал курсу, сприяє професійному розвитку здобувачів вищої освіти. Виконана робота може слугувати основою особистого портфоліо майбутнього фахівця та стимулювати його до професійного вдосконалення.

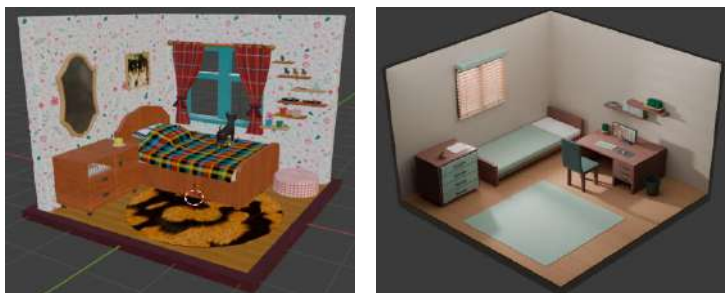


Рис. 3. Приклади проєктів здобувачів вищої освіти

Джерело: авторська розробка.

У межах дослідження слухачам дистанційного курсу було запропоновано оцінити зручність роботи з цим ресурсом. На рис. 4 представлені результати опитування. Вони свідчать про високий рівень задоволеності студентів як структурою курсу, так і якістю контенту, що підтверджує ефективність використання дистанційного ресурсу для організації освітнього процесу.

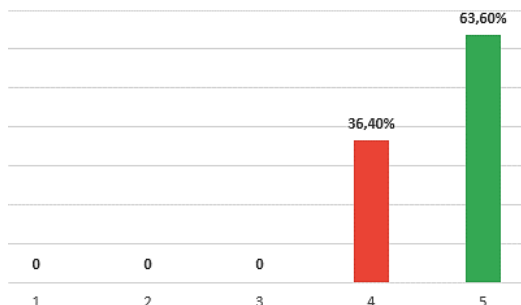


Рис. 4. Якість викладання та забезпечення навчального курсу за шкалою від 1 до 5

Джерело: авторська розробка.

Мета і зміст курсу, навчальний контент і практичні завдання сприяли ознайомленню здобувачів освіти з технологіями 3D-моделювання та мотивували їх до подальшого розвитку в цій сфері (рис. 5). Цей висновок підтверджують результати опитування, проведеного після завершення курсу. Зокрема, 54,5% здобувачів вищої освіти планують продовжити вивчення 3D-графіки вже на професійному рівні. Ще 18,2% респондентів виявили зацікавленість у

застосуванні технологій тривимірної графіки для реалізації власних ідей. Водночас 27,3% учасників зазначили, що рівень їх інтересу до 3D-графіки залишився незмінним порівняно з початком вивчення курсу.

Результати опитування щодо доцільності вивчення програми Blender 3D відображено на рис. 6. Зокрема, 27,3% респондентів розглядають Blender 3D як професійний інструмент для роботи з тривимірною комп'ютерною графікою, 18,2% виявили готовність до поглибленого вивчення програмного середовища. Близько половини опитаних (45,5%) не відмовляються від використання Blender 3D та розуміють умови, за яких його застосування буде доцільним. Водночас, лише 9,1% респондентів зазначили, що не планують використовувати це програмне забезпечення надалі. Отримані результати свідчать, що вивчення Blender 3D не лише зацікавило здобувачів освіти, але й мотивувало до подальшого опанування та практичного застосування технологій тривимірного моделювання.



Рис. 5. Інтерес до 3D-графіки після завершення вивчення курсу

Джерело: авторська розробка.

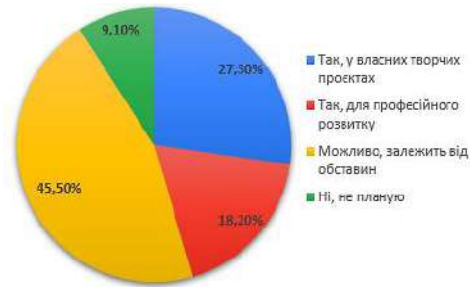


Рис. 6. Результати опитування щодо використання Blender 3D у майбутньому

Джерело: авторська розробка.

Сфери застосування технологій тривимірної графіки є різноманітними – від ігрових проєктів до технічних рішень. Це відкриває широкі можливості для тих, хто хоче реалізувати себе на професійному рівні. Ознайомившись із можливостями програми Blender 3D, здобувачі освіти визначили низку напрямів, у яких вони бачать потенціал для власного професійного зростання (рис. 7). Серед найбільш популярних сфер – ігрова графіка (63,6%) та 3D-друк (45,5%). Загалом, позитивним результатом навчання є те, що значна частина респондентів (63,6%) усвідомлює доцільне використання здобутих знань та вмінь для реалізації власних творчих проєктів.



Рис. 7. Сфери застосування програми Blender 3D

Джерело: авторська розробка.

Отримані результати свідчать, що зміст курсу «3D-графіка» відповідає інтересам здобувачів вищої освіти та є привабливим для опанування. Водночас технології тривимірної графіки належать до тих, що потребують спеціального комп'ютерного забезпечення, а також постійного оновлення знань, розвитку творчості. Оцінюючи процес вивчення Blender 3D, більшість здобувачів (72,7%) зазначили, що програмне забезпечення є доволі складним для засвоєння, проте цікавим (рис. 8).



Рис. 8. Показники складності процесу навчання Blender 3D

Джерело: авторська розробка.

Результати проведеного теоретичного й експериментального дослідження засвідчили, що включення освітніх компонентів із комп'ютерної графіки у форматі дистанційних практико-орієнтованих курсів у процес професійної підготовки майбутніх педагогів є доцільним та ефективним.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Включення освітніх компонентів щодо вивчення комп'ютерної графіки до процесу професійної підготовки майбутніх учителів інформатики та ІТ-фахівців є актуальним й необхідним. Такі компоненти можуть бути частиною обов'язкових професійних дисциплін або пропонуватися як вибіркові, доповнюючі і поглиблюючи базову підготовку здобувачів освіти. Одним з основних викликів у цьому контексті є питання технічного і програмного забезпечення.

Освітній процес із вивчення дисципліни «3D-графіка» доцільно організовувати, беручи до уваги принципи індивідуального й диференційованого підходу, активного і практико-орієнтованого навчання, акцентуючи на лабораторних (практичних) заняттях та із застосуванням відповідного дистанційного курсу. Особливого значення набуває технологія BYOD, що надає здобувачам вищої освіти можливість приносити на заняття власні гаджети та працювати з ними. Навчальні модулі дистанційного курсу є сукупністю лабораторних (практичних) занять, кожне з яких містить: формулювання завдання; інструкційні матеріали; діяльнісну частину; підсумкову рефлексію. Навчальний контент, який не лише інформує здобувачів освіти, а й стимулює їх до активної діяльності, повинен бути представлений у різних форматах (текст, відеофрагменти, презентації, фотографії, малюнки), характеризуватися змістом, інтерактивністю, доступністю. Вивчення програми Blender 3D зумовлене її перевагами як кросплатформеність, відкритість, доступність, широкий функціонал та практична затребуваність. За таких умов завдання мають бути варіативними, компетентнісними, практичними, характеризуватися тематичною відповідністю, зрозумілістю і чіткістю формулювань, унікальними. Важливим складником дистанційного курсу є контрольний компонент, що передбачає перевірку досягнень здобувачів вищої освіти у таких формах: поточні звіти, захист робіт, підсумковий контроль. Одним із мотивуючих чинників успішного вивчення технологій тривимірної графіки є можливість створення власних проєктів для формування професійного портфоліо. Варто зауважити, що організаційні і методичні підходи до вивчення тривимірної графіки у ЗВО досліджені ще не повною мірою і потребують подальшого вивчення. У перспективі доцільним є розгляд методики вивчення 3D-графіки крізь призму технологій проєктно-орієнтованого навчання із залученням інструментів штучного інтелекту.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори підтверджують відсутність фінансових, особистих чи інших інтересів, що можуть розглядатися як потенційний конфлікт інтересів щодо публікації цієї статті.

ФІНАНСУВАННЯ

Робота виконана за відсутності фінансової підтримки з боку будь-яких організацій.

ДОСТУПНІСТЬ ДАНИХ

Це теоретичне дослідження не передбачає використання додаткових наборів даних.

ВИКОРИСТАННЯ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Інструменти штучного інтелекту не використовувались при написанні цієї роботи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Барановська, І. Г., & Барановський, Д. М. (2024). Впровадження технологій 3d-моделювання в освітній процес підготовки здобувачів технічних та мистецьких спеціальностей. *Електронне наукове фахове видання «Відкрите освітнє е-середовище сучасного університету»*, (17), 1–17. <https://doi.org/10.28925/2414-0325.2024.171>
2. Войтович, І., & Павлова, Н. (2024). Дистанційний курс: від проєктування до реалізації. *Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Серія педагогічна*, (30), 81-85. <https://doi.org/10.32626/2307-4507.2024-30.81-85>
3. Гнедко, Н. М. (2025). Підготовка здобувачів вищої освіти до використання комп'ютерної графіки у майбутній професійній діяльності: сучасні підходи та виклики. *Академічні візії*, (43). URL: <https://www.academy-vision.org/index.php/av/article/view/1888>
4. Методичні рекомендації щодо підготовки навчальних планів у РДГУ 2025 р. (2024). *Сайт РДГУ*. URL: https://www.rshu.edu.ua/images/navch/met_rek_np_2025.pdf
5. Мосіюк, О. (2018). Особливості вивчення 3d моделювання у процесі професійної підготовки майбутніх учителів інформатики. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: «Педагогіка. Соціальна робота»*, (2(43), 182–186. <https://doi.org/10.24144/2524-0609.2018.43.182-186>
6. Освітні програми. (2025). *Міністерство освіти і науки України*. URL: <https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi>
7. Пазюк, Р. І., Нищак, Д. І., & Звоздяк, В. В. (2024). 3D-моделювання як сучасний засіб удосконалення професійної підготовки майбутніх учителів. *Педагогічна Академія: наукові записки*, (8). <https://doi.org/10.5281/zenodo.12783512>
8. Савельєва, Т., & Пустовой, Д. (2021). Використання програм 3d-моделювання у викладанні інженерної та комп'ютерної графіки. *Професіоналізм педагога: теоретичні й методичні аспекти*, 2(14), 155–166. <https://doi.org/10.31865/2414-9292.14.2021.236892>
9. Твердохліб, І., & Деркач, А. (2024). Особливості вивчення 3d моделювання в умовах змішаного навчання в закладах загальної середньої освіти. *Профільна середня освіта: виклики і шляхи реалізації: збірник матеріалів*. Видавничий дім «Освіта» (4 квітня 2024 року, м. Київ) 185-188. <https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/744149>
10. Юрченко, А., Удовиченко, О., & Шершень, О. (2022). Особливості вивчення 3d-графіки в умовах неформальної освіти. *Освіта. Інноватика. Практика*, 10(5), 48–57. <https://doi.org/10.31110/2616-650X-vol10i5-007>
11. Al-Nawaiseh, S.J., & Alkasasbeh, W.J. (2025). The Effectiveness of Using Graphic Design Programs in Enhancing Visual Thinking Skills among Educational Technology Students in Jordan. *International Journal of Innovative Research and Scientific Studies*. 8(1). 1404 1411. <https://doi.org/10.53894/ijirss.v8i1.4637>

12. Chemerys H., Osadcha K., Osadchyi V. & Kruhlyk V. (2019). Increase of the Level of Graphic Competence Future Bachelor in Computer Sciences in the Process of Studying Three-Dimensional Modeling. *ICT in Education, Research, and Industrial Applications. Proceedings of the 15th International Conference ICTERI 2019*, 2. 17-28. Retrieved from <https://eprints.mdpu.org.ua/id/eprint/5452/>
13. Kushiator, G., Adashie, M., Ayim, B., & Klodzi, I.Y. Digital Media Practices: Exploring the Challenges of Graphic Design Students in Senior High Schools in Ghana. *Journal of Education and Learning Technology*. 2023. 4(4). 91–101. <https://doi.org/10.38159/jelt.2023451>
14. Mosiuk O. O., Sikora Y. B., & Usata O. Yu.. (2023). Usability of program interfaces for teaching 3D graphics in a school course of informatics. *Information Technologies and Learning Tools*. 93(1). 14-28. URL: <https://eprints.zu.edu.ua/id/eprint/36830>

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Baranovska, I. H., & Baranovskyi, D. M. (2024). Vprovadzhennia tekhnolohii 3d-modeliuвання v osvittii protses pidhotovky zdobuvachiv tekhnichnykh ta mystetskykh spetsialnostei [Implementation of 3d Modeling Technologies in the Educational Training of Technical and Art Specialists]. *Elektronne naukove fakhove vydannia «Vidkryte osvittie e-seredovyshe suchasnoho universytetu» - Open Educational Environment of Modern University*, (17), 1–17. <https://doi.org/10.28925/2414-0325.2024.171> (in Ukrainian).
2. Voitovych I., & Pavlova N. (2024). Dystantsiinyi kurs: vid proiektuvannia do realizatsii [Distance Course: from Design to Implementation]. *Zbirnyk naukovykh prats Kamianets-Podilskoho natsionalnoho universytetu imeni Ivana Ohiiienka. Seriya pedahohichna – Collection of Scientific Papers of Kamianets-Podilskiy Ivan Ohiienko National University. Pedagogical Series*, (30), 81-85. <https://doi.org/10.32626/2307-4507.2024-30.81-85> (in Ukrainian).
3. Hnedko, N. M. (2025). Pidhotovka zdobuvachiv vyshchoi osvity do vykorystannia kompiuternoї hrafiky u maibutnii profesiinii diialnosti: suchasni pidkhody ta vyklyky [Preparation of Higher Education Students for Using Computer Graphics in their Future Professional Activities: Modern Approaches and Challenges]. *Akademychni vizii - Academic Visions*, (43). vylucheno iz <https://www.academy-vision.org/index.php/av/article/view/1888> (in Ukrainian).
4. Metodychni rekomendatsii shchodo pidhotovky navchalnykh planiv u RDHU 2025r. (2024). *Sait RDHU*. URL: https://www.rshu.edu.ua/images/navch/met_rek_np_2025.pdf (in Ukrainian).
5. Mosiuk, O. (2018). Osoblyvosti vyvchennia 3d modeliuвання u protsesi profesiinoi pidhotovky maibutnykh uchyteliv informatyky [The Features of Teaching 3d Modeling During Process of Professional Training of Future Computer Sciences Teachers]. *Naukovyi visnyk Uzhhorodskoho universytetu. Seriya: «Pedahohika. Sotsialna robota» - Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series: «Pedagogy. Social Work»*, (2(43)), 182–186. <https://doi.org/10.24144/2524-0609.2018.43.182-186> (in Ukrainian).
6. Osvitni prohramy. (2025). *Ministerstvo osvity i nauky Ukrainy*. URL: <https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi> (in Ukrainian).
7. Paziuk, R. I., Nyschak, D. I., & Zvozdiak, V. V. (2024). 3D-modeliuвання yak suchasnyi zasib udoskonalennia profesiinoi pidhotovky maibutnykh uchyteliv [3D-modeling as a Modern Means of Improvement Professional Training of Future Teachers]. *Pedahohichna Akademiia: naukovyi zapysky - Pedagogical Academy: Scientific Notes*, (8). <https://doi.org/10.5281/zenodo.12783512> (in Ukrainian).
8. Savelieva, T., & Pustovoi, D. (2021). Vykorystannia prohram 3d-modeliuвання u vykladanni inzhenernoi ta kompiuternoї hrafiky [Using 3d-modeling Programs in the Engineering and Computer Graphics Teaching]. *Profesionalizm pedahoha: teoretychni y metodychni aspekty - The Professionalism of the Teacher: Theoretical and Methodological Aspects*, 2(14), 155–166. <https://doi.org/10.31865/2414-9292.14.2021.236892> (in Ukrainian).
9. Tverdokhlib, I., & Derkach, A. (2024). Osoblyvosti vyvchennia 3d modeliuвання v umovakh zmishanoho navchannia v zakladakh zahalnoi serednoi osvity [Peculiarities of Studying 3D Modeling in the Conditions of Blended Learning in General Secondary Education]. *Profilna serednia osvita: vyklyky i shliakhy realizatsii: zbirnyk materialiv - Specialised Secondary Education: Challenges and Ways of Implementation: Collection of Materials*. Vydavnychiy dim «Osvita» (4 kvitnia 2024 roku, m. Kyiv) 185-188. <https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/744149> (in Ukrainian).
10. Yurchenko, A., Udovychenko, O., & Shershen, O. (2022). Osoblyvosti vyvchennia 3d-hrafiky v umovakh neformalnoi osvity [Features of Learning 3d Graphics in the Conditions of Informal Education]. *Osvita. Innovatyka. Praktyka – Education. Innovation. Practice*, 10(5), 48–57. <https://doi.org/10.31110/2616-650X-vol10i5-007> (in Ukrainian).
11. Al-Nawaiseh, S.J., & Alkasasbeh, W.J. (2025). The Effectiveness of Using Graphic Design Programs in Enhancing Visual Thinking Skills among Educational Technology Students in Jordan. *International Journal of Innovative Research and Scientific Studies*. 8(1). 1404 1411. <https://doi.org/10.53894/ijirss.v8i1.4637>
12. Chemerys H., Osadcha K., Osadchyi V. & Kruhlyk V. (2019) Increase of the Level of Graphic Competence Future Bachelor in Computer Sciences in the Process of Studying Three-Dimensional Modeling. *ICT in Education, Research, and Industrial Applications. Proceedings of the 15th International Conference ICTERI 2019*, 2. 17-28. Retrieved from <https://eprints.mdpu.org.ua/id/eprint/5452/>
13. Kushiator, G., Adashie, M., Ayim, B., & Klodzi, I.Y. Digital Media Practices: Exploring the Challenges of Graphic Design Students in Senior High Schools in Ghana. *Journal of Education and Learning Technology*. 2023. 4(4). 91–101. <https://doi.org/10.38159/jelt.2023451>
14. Mosiuk O. O., Sikora Y. B., & Usata O. Yu.. (2023). Usability of program interfaces for teaching 3D graphics in a school course of informatics. *Information Technologies and Learning Tools*. 93(1). 14-28. URL: <https://eprints.zu.edu.ua/id/eprint/36830>

| Матеріал надійшов до редакції: 10.08.2025 р. | Прийнято до друку: 19.10.2025 р. | Опубліковано: 28.11.2025 р. |



This work is licensed under Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.

ДОПОВНЕНА РЕАЛЬНІСТЬ НА УРОКАХ ФІЗИКИ: ДОСВІД ВИКОРИСТАННЯ PHYSICS LAB AR ЗА УМОВ ЗМІШАНОГО НАВЧАННЯ

Ольга СЛОБОДЯНИК ✉

Інститут цифровізації освіти

Національної академії педагогічних наук України, Україна

Oslobodyanyk84@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0003-3504-2684>

AUGMENTED REALITY IN PHYSICS LESSONS: EXPERIENCE USING PHYSICS LAB AR IN BLENDED LEARNING

Olha SLOBODIANYK ✉

Institute of Digitalization of Education

of the National Academy of Educational Sciences of Ukraine, Ukraine

Oslobodyanyk84@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0003-3504-2684>

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. Зміни у світі технологій, зокрема в галузі доповненої, віртуальної реальності, прорив у сфері штучного інтелекту, а також перехід на змішану форму навчання, змушують заклади освіти змінювати методи та підходи до освітнього процесу. Сучасні дослідження показують, що використання доповненої реальності (AR) у навчанні має багато переваг, які позитивно впливають на процес освіти.

Матеріали і методи. Для реалізації мети дослідження нами було використано комплекс методів, а саме: аналіз, систематизація, узагальнення наукових джерел, аналіз наукових публікацій вітчизняних і закордонних вчених, нормативно-правових документів, узагальнення власного досвіду, а саме опитування учнів щодо використання технологій доповненої реальності в освітньому процесі та аналіз навчальних досягнень суб'єктів навчання «до» та «після» дослідження.

Результати. Змішане навчання є сучасною педагогічною моделлю, у якій поєднуються класно-урочна форма з цифровими технологіями, що дозволяє учням самостійно опрацювати матеріал у зручний для них час. За такої форми навчання легко поєднувати традиційні методи з інтерактивними інструментами, освітній процес набуває гнучкості, учні працюють у власному темпі, рівень самостійності зростає. Для дисциплін природничо-математичного циклу ключовим аспектом навчання є проведення експериментів. В умовах змішаного навчання це стає можливим завдяки технологіям доповненої реальності та інтерактивним симуляціям, особливо для учнів, які не мають можливості відвідувати очні заняття з різних причин.

Висновки. Завдяки AR навчання стає більш інтерактивним та сприяє підвищенню інтересу та мотивації учнів до освітнього процесу, візуалізація дає можливість краще зрозуміти складні процеси; враховуються індивідуальні особливості кожного учня та надається можливість працювати у власному темпі. Проте не слід забувати, що сучасна молодь має залежність від цифрових засобів, з метою уникнення негативного впливу на розвиток інших навичок та соціальних вмінь використання AR, VR має бути дозованим.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: доповнена реальність; змішане навчання; фізика; освітній процес.

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Слободяник О. Доповнена реальність на уроках фізики: досвід використання Physics Lab AR за умов змішаного навчання. *Фізико-математична освіта*, 2025. Том 40. № 5. С. 61-67. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i5-08>.

ABSTRACT

Formulation of the problem. Changes in the world of technology, particularly in the fields of augmented and virtual reality, breakthroughs in artificial intelligence, and the transition to blended learning, are forcing educational institutions to adapt their methods and approaches to the educational process. Recent studies have demonstrated that the application of augmented reality (AR) in education presents numerous advantages that positively influence the educational process.

Materials and methods. A set of methods was employed, including analysis, systematization, and synthesis of scholarly sources; a review of scientific publications by both domestic and international researchers; examination of regulatory and policy documents; and reflection on our own professional experience. In particular, a student survey was conducted regarding the application of AR technologies in the educational process, complemented by an analysis of learners' academic performance before and after the implementation of the study.

Results. Blended learning is a modern pedagogical model that combines classroom teaching with digital technologies, allowing students to study material independently at a time convenient for them. This form of learning facilitates the integration of traditional methods with interactive tools, making the educational process more flexible and allowing students to work at their own pace, thereby increasing their level of independence. For natural science and mathematics subjects, conducting experiments is a key aspect of learning. In blended learning, this is made possible by augmented reality technologies and interactive simulations, particularly for students who are unable to attend face-to-face classes due to various reasons.

Conclusions. The integration of AR into education fosters interactivity, increases learner motivation, and stimulates interest in the learning process. Visualization tools enhance comprehension of complex phenomena, while personalized pathways allow students to work at a pace aligned with their individual needs. Nevertheless, it must be acknowledged that modern students often display a strong dependency on digital devices. To mitigate potential negative impacts on the development of essential soft skills and social competencies, the use of AR and VR should be carefully balanced and applied in moderation.

KEYWORDS: augmented reality; blended learning; physics; educational process.

FOR CITATION: Slobodyanyk, O. (2025). Augmented reality in physics lessons: experience using Physics Lab AR in blended learning. *Physical and Mathematical Education*, 40(5), 61-67. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i5-08>.

ВСТУП

Постановка проблеми. Сучасний освітній процес постійно еволюціонує під впливом нових технологій, зокрема доповнена реальність (AR) є однією із найзатребуваніших інновацій, що активно трансформують процес навчання. Впровадження AR у навчальні середовища пропонує унікальні можливості для інтерактивного навчання, стимулювання зацікавленості учнів та поглиблення їхнього розуміння складних процесів. Завдяки синергії фізичного і віртуального світів, доповнена реальність дозволяє створювати контекстуальні навчальні ситуації, де теоретичні знання набувають практичного значення.

На сьогодні основним завданням ЗЗСО є підготовка дитини до реального життя: навчити взаємодіяти в інформаційному полі, аналізувати, робити висновки, критично мислити. Як зазначено в Концепції Нової Української школи, запам'ятовування великих обсягів інформації не є ефективним, потрібне опанування учнем умінь, навичок та компетентностей, актуальних на ринку праці, тому у НУШ важливе місце відводиться питанню створення творчого середовища, у якому акценти на мобільних робочих зонах, оснащених сучасними технологіями. (*Концепція Нової Української школи, 2016*) Організація такого простору потребує широкого використання мультимедійних засобів, ІТ-технологій, сучасних лабораторних баз та бібліотек, що на даний момент є проблематичним у зв'язку з економічними причинами. Тому, пропонуємо як альтернативу використовувати імерсивні технології (VR, AR, MR, XR), а також ШІ. Звісно вони не замінять традиційних методів навчання, але можуть стати якісним доповненням освітнього процесу, зробити його практико-орієнтованим, цікавим, насиченим.

Аналіз актуальних досліджень. Дослідження вітчизняних та зарубіжних науковців показують, що використання AR-технологій у навчанні сприяє більш глибокому засвоєнню матеріалу, підвищує мотивацію учнів та розвиває їхні критичні навички мислення.

Серед вітчизняних науковців, які досліджували проблему використання впровадження AR-технології у навчальний процес Н. Сороко у своїй статті характеризує функції доповненої реальності для підтримки STEAM освіти в ЗЗСО (Сороко, 2021), а Л.Шкляр розглядає імерсивні технології як один із напрямів STEM-освіти (Шкляр, 2023). С. Литвинова, О.Буров, С.Семеріков у спільному дослідженні обґрунтували концептуальну модель використання AR в освітньому процесі та визначили її основні складники. Автори також обґрунтували принципи та підходи використання AR технологій у освітньому процесі, описали педагогічні умови, охарактеризували переваги та недоліки активного використання ІТ в освіті (Lytvynova et al., 2020). У роботі О.Гриб'юк представлено результати експериментального дослідження, зокрема вивчено результати впливу можливостей використання імерсивної освітньої системи на когнітивні процеси навчання учнів (Гриб'юк, 2022) Як зазначає Ю.Ботузова, застосування VR та AR дозволяє візуалізувати абстрактні математичні ідеї, роблячи їх більш доступними для розуміння учнів. Це особливо корисно для засвоєння абстрактних понять, формування чітких уявлень про просторові фігури. Загалом інтеграція імерсивних технологій у навчання математики є інноваційним кроком, що дозволяє вчителям та учням відкривати нові можливості для вивчення предмету та підвищувати ефективність навчання. (Ботузова, 2024).

Зарубіжні дослідники Cevikbas M., Bulut N., Kaiser G. здійснили систематичний огляд літератури з проблематики імерсивних технологій в освіті, зокрема в навчанні математики та дійшли висновків, що застосування AR/VR технологій перетворює математику на більш доступну та привабливу науку для тих, хто має труднощі з навчанням або особливі освітні потреби. Автори рекомендують вчителям математики для ефективної інтеграції технології AR/VR у свою практику викладання, пройти відповідне навчання, а також налагоджувати співпрацю з колегами та ділитися кращими практиками в своїй математичній освітній спільноті (Cevikbas et al., 2023).

Fromm, J., Radianti, J., у своїх працях досліджують можливості емпіричного навчання засобами віртуальної реальності та доповненої реальності (Fromm & Radianti, 2021); Baptista De Lima, C., Walton, S., & Owen, T. (2022) у своєму дослідженні зазначають, що технології доповненої реальності мають великий потенціал в освіті, проте не правильне їх застосування може призвести до погіршення результатів навчання. Bower, M., Howe, C., McCredie, N., зазначають, що доповнена реальність сприяє розвитку аналітичного та критичного мислення (Bower et al., 2020).

AR це відносно новий тренд серед технологій в освіті, що відкриває нові можливості в області досліджень не способом заміни реального обладнання, а через доповнення, розширення, урізноманітнення освітнього процесу засобами навчання. Насправді імерсивні технології забезпечують рівність в освіті. Для сучасних учнів важливим є момент візуалізації абстрактних понять, об'єктів та явищ. Не завжди в навчальному закладі є необхідне обладнання для практичних і лабораторних робіт або ж за реальних умов дослідити явище чи процес неможливо, то в такому випадку доцільно використовувати симуляції або імерсивні технології (IT) (Salnyk & Fomenko, 2023). Наприклад, у вивченні фізики ІТ варто поставити на друге місце після експерименту з реальним обладнанням, але якщо такий не можливий, то й на перше. Наразі в Google Play і в AppStore є великий вибір додатків, які можна використовувати на заняттях. Зокрема, для використання на уроках фізики можна запропонувати Arloora, Merge EDU Platform, MEL VR Science Simulations VR Chosen Physics, Physics Lab AR та ін.. Більшість з них мають англійський інтерфейс, що створює певні незручності для вчителів, які не володіють мовою. Серед вітчизняних розробок можна виокремити BookVAR та ARSchool.Chemie, вони мають українськомовний інтерфейс та досить зручні у використанні.

Метою дослідження проаналізувати педагогічні можливості використання засобу доповненої реальності *Physics Lab AR* у процесі навчання фізики за умов змішаного навчання, дослідити його вплив на формування навчальних досягнень учнів, мотивацію та активізацію пізнавальної діяльності, а також визначити ефективні підходи до інтеграції цієї технології у шкільну практику.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для реалізації мети дослідження нами було використано комплекс методів, а саме: аналіз, систематизація, узагальнення наукових джерел, аналіз наукових публікацій вітчизняних і закордонних вчених, нормативно-правових

документів, узагальнення власного досвіду, а також перевірка ефективності AR технологій, зокрема, Physics Lab AR в освітньому процесі.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У сучасних умовах поширення змішаного навчання, яке поєднує очні заняття з дистанційними технологіями, особливої уваги заслуговують цифрові інструменти, що дозволяють організувати віртуальні експерименти. Одним із таких рішень є мобільний застосунок Physics Lab AR, що використовує технологію доповненої реальності (AR) для моделювання фізичних явищ.

Змішане навчання є сучасною педагогічною моделлю, яка поєднує традиційні очні заняття з цифровими технологіями, що дозволяє учням самостійно опрацювати матеріал у зручний для них час. Воно має такі характеристики:

- Гнучкість навчального процесу (учні можуть вивчати матеріал у власному темпі).
- Можливість використання інтерактивних інструментів, таких як AR і VR.
- Підвищення рівня самостійності учнів.

У контексті фізики одним із ключових аспектів навчання є проведення експериментів. В умовах змішаного навчання постає питання доступності таких досліджень для всіх учнів. Саме тому технології доповненої реальності можуть стати ефективним рішенням.


Physics Lab AR  – це мобільний застосунок, що дозволяє проводити фізичні експерименти у доповненій реальності. А саме: віртуальні лабораторні роботи з механіки, електрики, оптики, термодинаміки тощо; інтерактивне моделювання фізичних процесів із можливістю зміни параметрів (маса, швидкість, напруга тощо); збирати та аналізувати дані у цифровому форматі; створювати власні експерименти та тестувати їх. Додаток дозволяє створювати віртуальні експерименти без потреби у фізичному обладнанні, що робить його особливо корисним у дистанційному та змішаному навчанні.



Рис. 1. Лабораторія електрики в Physics Lab AR

Джерело: авторська розробка.

Перед початком роботи з додатком, учні мають можливість за допомогою посібника ознайомитися з набором інструментів для побудови кола (рис.1а), потім додаток може самостійно побудувати схему до створеного електричного кола, тобто перемикаючись між вкладками можна змінювати вид подачі.

Наведемо декілька прикладів індивідуальних завдань, які учні виконують з використанням додатку.

1. **Практичне завдання.** У середовищі Physics Lab AR зберіть просте електричне коло з батареєю, лампочкою та перемикачем:

- Увімкніть та вимкніть перемикач. Зроби висновок: яка роль перемикача в електричному колі?
- Додайте другу лампочку послідовно. Як змінилася яскравість лампочок?
- Поміркуйте чи можливо додати в коло ще одну лампочку? Якщо так, то якої потужності?

Перевірте свої припущення на практиці.

2. **Творче завдання.** Використай Physics Lab AR, щоб змоделювати будь-який дослід із курсу 7 класу на власний розсуд (наприклад: закон Паскаля, закон відбиття світла, сила тертя).

- Опиши хід дослідів.
- Зроби скріншот/замальовку результату.
- Поясни, яке фізичне явище ти дослідив.

3. **Дослідницьке завдання** а) Відкрийте Physics Lab AR, виберіть симуляцію «Point Charges» або «Electrostatics». Встановіть один позитивний заряд $+Q$ на позицію А (наприклад, координати $x=0$). Розмістіть другий заряд В на 3 різних відстанях від А (наприклад: 2 см, 5 см, 8 см) і для кожної відстані виконайте дослід два рази (випадок 1: В = $+q$ однойменні заряди; випадок 2: В = $-q$ різнойменні заряди) Використовуйте однакову величину $|q|$ (наприклад, 1 умовна одиниця заряду) для всіх експериментів.

б) Для кожної конфігурації увімкніть індикатор сили або подивіться величину сили взаємодії (можна використовувати відображення векторів та числові значення). Запишіть напрями (притягання чи відштовхування) і величину сили в таблицю.

в) Увімкни показ силових ліній для пари зарядів у кожній конфігурації. Малюй (або зроби скріншоти) схеми силових ліній для випадку однойменних і різнойменних зарядів.

г) Змініть величину одного заряду (наприклад, збільшій, а потім зменшій у 2 рази) та повторіть вимірювання для фіксованої відстані. Запишіть, як змінилася сила.

Переміщуючи інструменти, на робоче поле, учні мають можливість експериментувати, створювати, аналізувати, проводити віртуальні експерименти, змінюючи параметри (наприклад, масу об'єкта, швидкість або величину сили) та спостерігаючи результати в реальному часі. Це дозволяє їм отримати практичний досвід без ризику для безпеки.

На рис.2 можемо спостерігати взаємодію зарядів, кожен учень може самостійно додавати чи видаляти потрібний заряд та спостерігати як змінюється поле між ними.

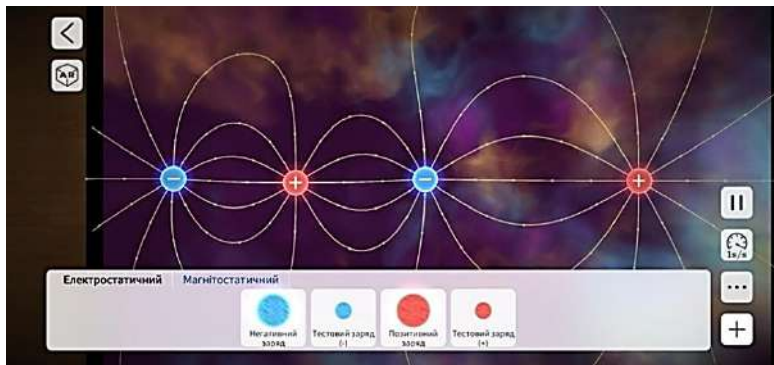


Рис. 2. Дослідження взаємодії зарядів у Physics Lab AR

Джерело: авторська розробка.

На рис. 3 показано можливості дослідження сонячної системи з додаванням інших планет, при чому у верхньому правому куті одразу відображаються основні характеристики швидкість, маса, радіус, тощо. Кожен користувач має можливість поділитися своїм проектом, зберегти на диск, опублікувати для загального огляду.



Рис. 3. Дослідження сонячної системи у Physics Lab AR

Джерело: авторська розробка.

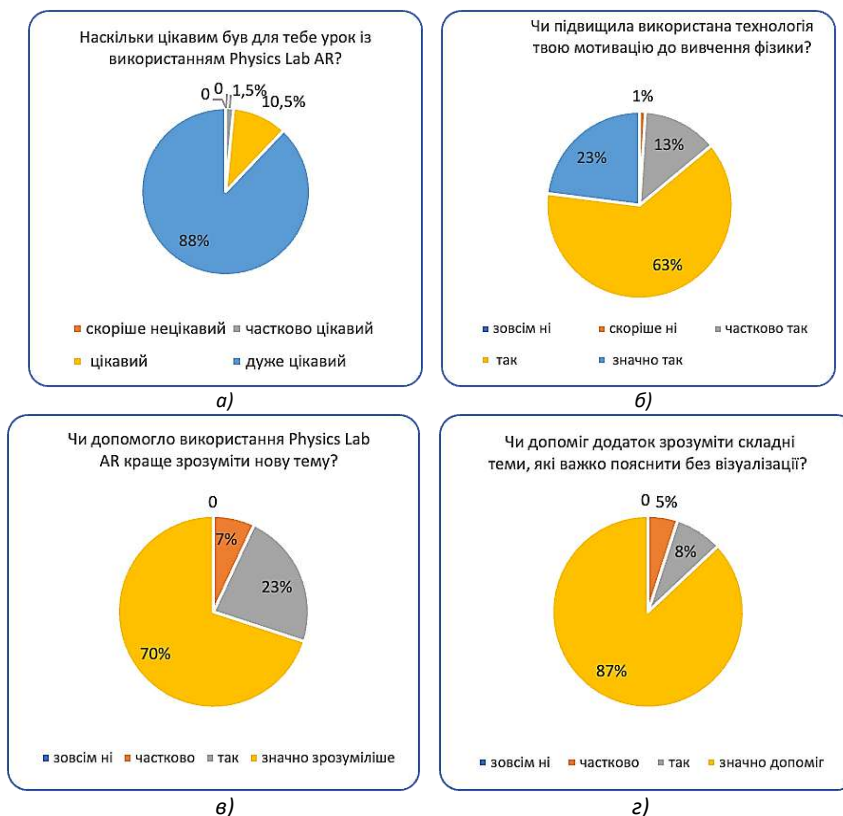


Рис. 4. Результати опитування учнів щодо доцільності використання AR додатку на уроках фізики

Джерело: авторська розробка.

У дослідженні взяло участь 132 учні 7-8 класів школи №1 міста Києва, 23 з них перебувають на сімейній формі навчання. На початку дослідження нами було проаналізовано рівень навчальних досягнень здобувачів до застосування технологій доповненої реальності та після (рис.5).

Після використання доповненої реальності на уроках, нами було проведено опитування учнів, результати наведено на діаграмах (рис. 4, а-г). Бачимо, що рівень зацікавлення зростає, підвищується мотивація до навчання, складні речі стають зрозумілішими і простішими у сприйнятті.

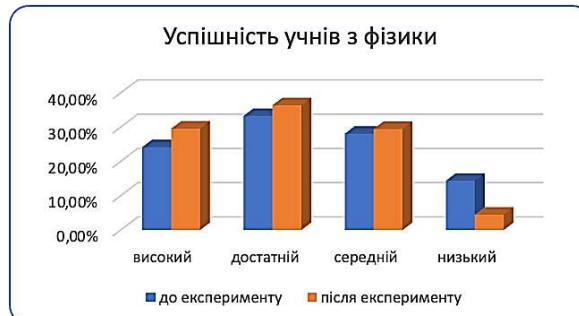


Рис. 5. Динаміка успішності учнів з фізики після використання AR в освітньому процесі (Physics Lab AR)

Джерело: авторська розробка.

На діаграмі відображено динаміку навчальної діяльності з використанням імерсивних технологій. Проаналізувавши більш детально результати опитування та контингент учнів, що покращили рівень навчальних досягнень, виявили, що це переважно учні, які навчаються на сімейній формі навчання і не мають змоги повноцінно відвідувати очні заняття. Тому, застосування засобів доповненої реальності, зокрема Physics Lab AR за умов змішаного навчання, має ряд переваг для реалізації компонентів навчання.

1. **Практичний компонент.** Доступність експериментів (навіть якщо лабораторне обладнання відсутнє у школі або вдома); *безпека* (можна виконувати експерименти без ризику отримання травм); можливість *самостійного вивчення* фізики (з'являється можливість виконувати експерименти у зручний час, а також надавати додаткові ресурси та пояснення, наприклад, при наведенні на об'єкт може з'явитися додаткова інформація або відео з поясненням явища); *розширення можливостей дослідження* (можна моделювати складні явища, які важко або неможливо відтворити у звичайних умовах (наприклад, рух планет, магнітне поле Землі тощо,) збір та аналіз даних експериментів може бути полегшено за допомогою AR. Учні зможуть легко взаємодіяти з даними, проводити графічний аналіз і бачити результати в режимі реального часу, що є важливим для майбутнього моделювання явища чи процесу.

2. **Мотиваційний компонент.** Інтерактивність, елементи гейміфікації заохочують учнів до активної діяльності, сприяють підвищенню інтересу до предмета, формуванню внутрішньої мотивації та розвитку пізнавальної активності. Учні демонструють більш високий рівень залученості у процес вивчення складного матеріалу. Особливої уваги заслуговує використання технологій доповненої реальності (AR) у *проектній діяльності*, а саме у віртуальних фізичних лабораторіях, що може значно «збагатити» навчальний процес та підвищити зацікавленість учнів, сприяти груповим проектам, де учні можуть спільно працювати над експериментами чи ескізами, обговорюючи та вивчаючи фізичні принципи.

3. **Соціально-комунікативний компонент.** AR-платформи підтримують колаборативні форми роботи (групові дослідження, спільні проекти), що розвиває комунікативні навички та вміння працювати в команді. Вчитель *на уроці може* використати мобільний застосунок для демонстрації експериментів або ж запропонувати групову роботу учнів із віртуальними експериментами чи виконати самостійні дослідження з подальшим обговоренням результатів.

4. **Результативний компонент.** За даними емпіричних досліджень (Radianti et al., 2021; Bower et al., 2020), використання AR підвищує середні бали учнів на 15–25% у порівнянні з традиційними методами навчання, особливо у галузях STEM. Завдяки AR учні можуть отримати доступ до великої кількості віртуальних ресурсів і матеріалів, які можуть бути недоступні в звичайному класному середовищі.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Проведений аналіз засвідчив, що використання засобу доповненої реальності Physics Lab AR у процесі навчання фізики за умов змішаного навчання має суттєвий педагогічний потенціал. Технологія забезпечує наочність і доступність складних абстрактних понять, сприяє формуванню цілісного уявлення про фізичні процеси та підвищенню рівня навчальних досягнень учнів. Вона позитивно впливає на мотиваційну сферу, активізує пізнавальну діяльність, створює умови для розвитку дослідницьких умінь і критичного мислення.

Ефективність упровадження Physics Lab AR залежить від продуманих педагогічних стратегій: поєднання традиційних і цифрових методів навчання, інтеграції елементів гейміфікації, персоналізації завдань, а також організації групової взаємодії в AR-середовищі. Доцільним є поступове розширення практики використання цієї технології у школі, що дозволить не лише підвищити якість засвоєння навчального матеріалу, а й сформувати в учнів вміння застосовувати знання в реальних і змодельованих умовах.

Отже, Physics Lab AR може стати ефективним інструментом підтримки змішаного навчання фізики, здатним інтегрувати інноваційні технології з традиційною методикою, забезпечуючи новий рівень взаємодії учня з навчальним контентом. Перспективи подальших досліджень вбачаємо в дослідженні методичних підходів у підготовці вчителів фізики

до використання доповненої реальності, розробці моделі інтеграції AR у навчальні програми та оцінці впливу на освітні результати у довготривалій перспективі.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори підтверджують відсутність фінансових, особистих чи інших інтересів, що можуть розглядатися як потенційний конфлікт інтересів щодо публікації цієї статті.

ФІНАНСУВАННЯ

Робота виконана за відсутності фінансової підтримки з боку будь-яких організацій..

ДОСТУПНІСТЬ ДАНИХ

Це теоретичне дослідження не передбачає використання додаткових наборів даних.

ВИКОРИСТАННЯ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Інструменти штучного інтелекту не використовувались при написанні цієї роботи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ботузова, Ю. В. (2024). Можливості використання імерсивних технологій у навчанні математики. *Наукові записки. Серія: Педагогічні науки*, (212), 14-19. <https://doi.org/10.36550/2415-7988-2024-1-212-14-19>
2. Гриб'юк, О. (2022). Педагогічне проектування компонентів віртуальної і доповненої реальності КОМСДН у процесі дослідницького навчання учнів предметів природничо-математичного циклу у закладах загальної середньої освіти. *Педагогіка формування творчої особистості у вищій і загальноосвітній школах*, 83, 78-93.
3. Концепція Нової Української школи. (2016). URL: <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/nova-ukrainska-shkola-compressed.pdf>
4. Литвинова, С.Г., Бузов, О.Ю., & Семеріков, С.О. (2020). Концептуальні підходи до використання засобів доповненої реальності в освітньому процесі. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми: збірник наукових праць*. Вінниця: ТОВ «Друк плюс», 55, 46-62.
5. Сальник, І., & Фоменко, О. (2023). Імерсивні технології в умовах дистанційного та змішаного навчання. *Фізика та освітні технології*, (2), 36-44. <https://doi.org/10.32782/pet-2023-2-5>
6. Сороко, Н.В. (2021). Функції доповненої реальності для підтримки STEAM освіти в закладах загальної освіти. *Фізико-математична освіта*, 29(3), 24-30. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2021-029-3-004>
7. Шкляр, Л. (2023). Імерсивні технології: новий напрям STEM-освіти. *Педагогічний вісник Поділля*, 3, 24-26.
8. Baptista De Lima, C., Walton, S., & Owen, T. (2022). A critical outlook at augmented reality and its adoption in education. *Computers and Education Open*, 3, 100103. <https://doi.org/10.1016/j.caeo.2022.100103>
9. Bower, M., Howe, C., McCredie, N., Robinson, A., & Grover, D. (2020). Augmented Reality in education—cases, places and potentials. *Educational Media International*, 51(1), 1-15.
10. Cen, L., Ruta, D., Al Qassem, L. M. M. S., & Ng, J. (2019). Augmented immersive reality (AIR) for improved learning performance: a quantitative evaluation. *IEEE Transactions on Learning Technologies*, 13(2), 283-296.
11. Evikbas, M., Bulut, N., & Kaiser, G. (2023) Exploring the Benefits and Drawbacks of AR and VR Technologies for Learners of Mathematics: Recent Developments. *Systems*, 11(244), 1-23.
12. Fromm, J., Radianti, J., Wehking, C., Stieglitz, S., Majchrzak, T. A., & vom Brocke, J. (2021). More than experience? On the unique opportunities of virtual reality to afford a holistic experiential learning cycle. *The Internet and Higher Education*, 50, 100804. <https://doi.org/10.1016/j.iheduc.2021.100804>
13. Lytvynova, S. G. (2020). Conceptual approaches to the use of augmented reality tools in the educational process. *Modern information technologies and innovative teaching methods in the training of specialists: methodology, theory, experience, problems*, 55, 4662. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/mitimpt_2020_55_8
14. Sarigoz, O. (2019). Augmented reality, virtual reality and digital games: a research on teacher candidates. *Educational Policy Analysis and Strategic Research*, 14(3), 41-63.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Botuzova, Yu. V. (2024). Mozhyvosti vykorystannia imersyvnykh tekhnolohii u navchanni matematyky [Possibilities of using immersive technologies in teaching mathematics]. *Naukovi zapysky. Seriya: Pedahohichni nauky – Scientific notes. Series: Pedagogical sciences*, (212), 14-19. <https://doi.org/10.36550/2415-7988-2024-1-212-14-19> (in Ukrainian)
2. Hryb'iuik, O. (2022). Pedahohichne proektuvannia komponentiv virtualnoi i dopovnenoj realnosti KOMSDN u protsesi doslidnytskoho navchannia uchniv predmetiv pryrodnycho-matematychnoho tsyklu u zakladakh zahalnoi serednoi osvity [Pedagogical design of virtual and augmented reality components of KOMSDN in the process of research teaching of students of natural science and mathematics subjects in secondary education institutions]. *Pedahohika formuvannia tvorchoi osobystosti u vyshchii i zahalnoosvitnii shkolakh - Pedagogy of the formation of a creative personality in higher and general education schools*, 83, 78-93. (in Ukrainian)
3. *Kontseptsiiia Novoi Ukrainskoi shkoly [Concept of the New Ukrainian School]*. (2016) URL: <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/nova-ukrainska-shkola-compressed.pdf> (in Ukrainian)
4. Lytvynova, S. H., Burov, O. Yu., & Semerikov, S. O. (2020). Kontseptualni pidkhody do vykorystannia zasobiv dopovnenoj realnosti v osvitnomu protsesi [Conceptual approaches to the use of augmented reality tools in the educational process]. *Suchasni informatsiini tekhnolohii ta innovatsiini metodyky navchannia u pidhotovtsi fakhivtsiv: metodolohiia, teoriia, dosvid, problemy: zbirnyk naukovykh prats – Modern information technologies and innovative teaching methods in the training of specialists: methodology, theory, experience, problems: collection of scientific papers*. Vinnytsia: TOV «Druk plus», 55, 46-62. (in Ukrainian)
5. Salyk, I., & Fomenko, O. (2023). Imersyvni tekhnolohii v umovakh dystantsiinoho ta zmishanoho navchannia [Immersive technologies in conditions of distance and blended learning]. *Fizyka ta osvitni tekhnolohii – Physics and educational technologies*, 2, 36-44. <https://doi.org/10.32782/pet-2023-2-5> (in Ukrainian)

6. Soroko, N. (2021). The augmented reality functions to support the steam education at general education institutions. *Physical and Mathematical Education*, 29(3), 24–30. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2021-029-3-004> (in Ukrainian)
7. Shkliar, L. (2023). Imersywni tekhnolohii: novyi napriam STEM-osvity [Immersive technologies: a new direction in STEM education]. *Pedahohichnyi visnyk Podillia – Pedagogical Bulletin of Podillia*, 3, 24-26. (in Ukrainian)
8. Baptista De Lima, C., Walton, S., & Owen, T. (2022). A critical outlook at augmented reality and its adoption in education. *Computers and Education Open*, 3, 100103. <https://doi.org/10.1016/j.caeo.2022.100103>
9. Bower, M., Howe, C., McCredie, N., Robinson, A., & Grover, D. (2020). Augmented Reality in education—cases, places and potentials. *Educational Media International*, 51(1), 1-15.
10. Cen, L., Ruta, D., Al Qassem, L. M. M. S., & Ng, J. (2019). Augmented immersive reality (AIR) for improved learning performance: a quantitative evaluation. *IEEE Transactions on Learning Technologies*, 13(2), 283-296.
11. Cevikbas, M., Bulut, N., & Kaiser, G. (2023) Exploring the Benefits and Drawbacks of AR and VR Technologies for Learners of Mathematics: Recent Developments. *Systems*, 11(244), 1-23.
12. Fromm, J., Radiani, J., Wehking, C., Stieglitz, S., Majchrzak, T. A., & vom Brocke, J. (2021). More than experience? On the unique opportunities of virtual reality to afford a holistic experiential learning cycle. *The Internet and Higher Education*, 50, 100804. <https://doi.org/10.1016/j.iheduc.2021.100804>
13. Lytvynova, S. G. (2020). Conceptual approaches to the use of augmented reality tools in the educational process. *Modern information technologies and innovative teaching methods in the training of specialists: methodology, theory, experience, problems*, 55, 4662. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/mitimpt_2020_55_8
14. Sarigoz, O. (2019). Augmented reality, virtual reality and digital games: a research on teacher candidates. *Educational Policy Analysis and Strategic Research*, 14(3), 41-63.

| Матеріал надійшов до редакції: 10.08.2025 р. | Прийнято до друку: 29.09.2025 р. | Опубліковано: 28.11.2025 р. |

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З МАТЕМАТИКИ УЧНЯМИ СТАРШОЇ ШКОЛИ ЯК ЕФЕКТИВНИЙ ЗАСІБ ФОРМУВАННЯ КОМПЕТЕНТНОСТІ «ПІДПРИЄМЛИВІСТЬ ТА ФІНАНСОВА ГРАМОТНІСТЬ»

Олена ТКАЧ ✉

Український державний університет
імені Михайла Драгоманова, Україна
ms.helentkach@gmail.com
<https://orcid.org/0009-0000-9758-648X>

SOLVING MATHEMATICAL PROBLEMS BY HIGH SCHOOL STUDENTS AS AN EFFECTIVE TOOL FOR DEVELOPING THE COMPETENCE OF «ENTREPRENEURSHIP AND FINANCIAL LITERACY»

Olena TKACH ✉

Dragomanov Ukrainian State University, Ukraine
ms.helentkach@gmail.com
<https://orcid.org/0009-0000-9758-648X>

АНОТАЦІЯ

У статті висвітлено методичні аспекти розв'язування прикладних задач на уроках математики для формування компетентності «підприємливість та фінансова грамотність», наведено етапи розв'язування таких задач.

Формулювання проблеми. Цифровізація населення України та прагнення до підвищення рівня фінансової грамотності відбуваються зміни в освітніх тенденціях. На сьогодні Державний стандарт базової середньої освіти та Державний стандарт профільної середньої освіти побудовані на компетентнісному підході. Однією з ключових компетентностей виокремлено «підприємливість та фінансову грамотність», що передбачає здатність людини ініціювати, планувати та реалізовувати ідеї, брати на себе відповідальність, знаходити можливості і ресурси для досягнення своєї мети, уміти ефективно управляти власними фінансами, користуватися банківськими продуктами та приймати фінансові рішення. Враховуючи нормативні документи сучасному вчителю необхідно знайти такі засоби і методи, які ефективно змогли б реалізувати поставлені завдання.

Матеріали і методи. Для даного дослідження було використано комплекс методів: теоретичний – для аналізу нормативних документів, емпіричний – педагогічне спостереження за навчальною діяльністю учнів 10-11 класів під час розв'язування задач.

Результати. У дослідженні представлено приклад фабули компетентнісної задачі, яка відповідає віковим особливостям учнів старшої школи та мотивує їх до розв'язування та самостійного пошуку інформації. Виокремлено етапи розв'язування прикладних задач для ефективного формування компетентності «підприємливість та фінансова грамотність».

Висновки. Розв'язування прикладних задач із фінансовим змістом показало свою ефективність у формуванні компетентності «підприємливість та фінансова грамотність» у старшокласників. Використання актуальних даних, QR-кодів і навчальних дискусій підвищує мотивацію учнів, формує критичне мислення та робить математику дієвим інструментом для прийняття реальних фінансових та підприємницьких рішень.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: старша школа; прикладні задачі; фінансова грамотність; підприємливість; компетентність.

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Ткач О. Розв'язування задач з математики учнями старшої школи як ефективний засіб формування компетентності «Підприємливість та фінансова грамотність». *Фізико-математична освіта*, 2025. Том 40. № 5. С. 68-73. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i5-09>.

ABSTRACT

The article highlights the methodological aspects of solving applied problems in mathematics lessons to form the competence «entrepreneurship and financial literacy»; the stages of solving such problems are given.

Formulation of the problem. Considering the current trends in technology development, the digitalization of Ukraine's population, and the desire to enhance financial literacy, changes are occurring in educational trends. Today, the State Standard of Basic Secondary Education and the State Standard of Specialized Secondary Education are built on a competency-based approach. One of the key competencies is «entrepreneurship and financial literacy», which implies a person's ability to initiate, plan, and implement ideas, take responsibility, find opportunities and resources to achieve their goals, be able to effectively manage their own finances, use banking products, and make financial decisions. Considering regulatory documents, a modern teacher must find effective means and methods to implement the assigned tasks.

Materials and methods. A combination of methods was employed in this study: theoretical, for analyzing regulatory documents, and empirical, involving pedagogical observation of the educational activities of 10th–11th grade students while they solved problems.

Results. The study presents an example of a competency-based problem scenario tailored to the age-specific characteristics of high school students and designed to motivate them to solve the problem and independently seek information. The stages of solving applied problems are identified to effectively develop the competence of «entrepreneurship and financial literacy».

Conclusions. Solving applied problems with financial content has proven effective in developing the competence of «entrepreneurship and financial literacy» among high school students. The use of relevant data, QR codes, and educational discussions enhances student motivation, fosters critical thinking, and transforms mathematics into a valuable tool for making informed financial and entrepreneurial decisions in real life.

KEYWORDS: high school; applied problems; financial literacy; entrepreneurship; competence.

FOR CITATION: Tkach, O. (2025). Solving mathematical problems by high school students as an effective tool for developing the competence of «Entrepreneurship and financial literacy». *Physical and Mathematical Education*, 40(5), 68-73. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i5-09>.

ВСТУП

Постановка проблеми. У сучасних умовах розвитку суспільства та цифровізації банківських операцій особливої актуальності набуває формування у старшокласників необхідних у повсякденному житті умінь і навичок, які забезпечать їх готовність до успішної соціалізації, самореалізації та професійного становлення.

Водночас зазначаємо, що згідно із загальнонаціональним опитуванням, проведеним Національним банком України та проектом USAID у 2021 році група опитаних у віці від 18-19 років показала найнижчі показники (USAID, 2021). У 2023 році центр фінансових знань «Талан» оприлюднив результати опитування з фінансової грамотності для дітей віком 11-18 років, за результатами якого, 86% підлітків хотіли б підвищувати свою фінансову обізнаність в школі (Войтицька & Ролік, 2023).

Щодо підприємливості варто зауважити, що відповідно до Аналітичного звіту SCORE(UNDP, 2021) лише 7% громадян України мають намір розпочати власну справу, а 6% уже є підприємцями. Хоча за даними досліджень Європейського фонду розвитку навичок(Eurogean Training Foundation, 2023), 73% української молоді виявляють бажання вести власний бізнес, однак ці наміри залишаються декларативними, оскільки молодь не має твердого освітнього підґрунтя для цієї діяльності.

Для підвищення рівня фінансової та підприємницької обізнаності населення на рівні державної політики була розроблена Національна стратегія розвитку фінансової грамотності до 2030 року (National Bank of Ukraine, 2020), яка передбачає дії в рамках перших чотирьох стратегічних цілях. Першою ціллю, відповідно до цієї стратегії, є діти, молодь та освітяни. Відповідно до цих викликів у новому Державному стандарті профільної середньої освіти (Про затвердження Державного стандарту профільної середньої освіти, 2024) у мету освітнього процесу закладено формування ключових компетентностей, які необхідні для всебічного розвитку особистості. Однією з цих ключових компетентностей є «підприємливість і фінансова грамотність». Такий підхід до навчання передбачає, що здобувач освіти, водночас із класичними знаннями отримає «фундамент» умінь і навичок на базі профільної середньої школи та, будучи у дорослому віці, зможе надалі самостійно розвиватися та успішно реалізувати себе в житті.

Отже, для реалізації поставлених вимог необхідно використати такі засоби навчання, які будуть актуальні, ефективні та відповідати віковим особливостям учнів старшої школи.

Аналіз актуальних досліджень. Проблематика фінансової грамотності та підприємливості має глобальний характер і активно досліджується в межах міжнародної педагогіки. За результатами емпіричних досліджень шкільні програми, які включають розвиток фінансової грамотності в здобувачів освіти істотно підвищують рівень обізнаності й готовності до фінансової самостійності (Salas-Velasco, 2025; Aljaouni et al., 2020). Так, міжнародні дослідження підтверджують, що існує тісний зв'язок між рівнем математичних знань та фінансовою обізнаністю (Skagerlund et al., 2018; Zhou et al., 2023), а використання цифрових технологій дозволяє суттєво підвищити навчальну мотивацію учнів під час формування компетентностей (Hernández-Martínez et al., 2025).

Певні аспекти формування фінансової грамотності населення розглядали у своїх працях такі вітчизняні науковці як Л. Захаркіна та М. Катериніна (2014), Т. Кізіма (2012), А. Кузнєцова (Смовженко & Кузнєцова, 2013). За редакцією Т. Смовиженко була розроблена програма вибіркового курсу «Фінансова грамотність» для учнів 10-11 класів, методичні та навчальні матеріали, метою яких є познайомити учнів із сучасними фінансовими продуктами та послугами, вміти планувати своє фінансове майбутнє (Інститут модернізації освіти, б.д.).

Питання впливу математичних знань, умінь і навичок на вміння управляти особистими фінансами та реалізацією підприємницьких ідей, посилення інтересу в учнів до фінансових понять на уроках математики було окреслено в дослідженнях В. Швеця(Швець & Черненко, 2024), М. Бурди та Д. Васильєвої (2017).

У світовій практиці компетентнісний підхід розглядається як провідна парадигма модернізації математичної освіти (Hardie et al., 2022). Зокрема, зазначається вплив ролі вчителя, його компетентності на ефективність досягнутих результатів (Zlatkin-Troitschanskaia et al., 2024), необхідність збагачення посібників методичними матеріалами (Vilalta Riera et al., 2024).

Мета статті. З огляду на вищевикладене метою є висвітлення методичних підходів до застосування прикладних задач з фінансовим змістом, як до ефективного засобу формування у старшокласників ключової компетентності «підприємливість та фінансова грамотність» у процесі навчання математики.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для досягнення мети було використано комплекс методів: теоретичний – для аналізу нормативних документів, емпіричний – педагогічне спостереження за навчальною діяльністю учнів 10-11 класів під час розв'язування задач, анкетування.

Анкетування було проведене у квітні 2025 року серед учнів 11 класу Ліцею №128 Дніпровського району м. Києва, у якому взяло участь 40 респондентів віком 16-17 років.

Анкета містила 6 запитань:

1. Чи вважаєте ви, що математичні знання сприяють розумінню фінансових процесів?
2. Якщо відповідь на перше запитання «так», то вкажіть, яка діяльність на уроках математики сприяла цьому найбільше: розв'язування прикладних задач, обговорення, навчальні дискусії, використання QR-кодів для пошуку чи перевірки даних, інше(вказіть).
3. Які з наведених понять Вам були відомі до уроків, а про які ви дізналися на уроках математики? (Інфляція, депозит, податок, кредит, інвестиції, прибуток, фінансовий ризик)
4. Чи змінилося ваше ставлення до планування власного бюджету після уроків математики?
5. Чи обговорюєте ви фінансові теми вдома з батьками/родичами?
6. Якщо відповідь на попереднє запитання «так», вкажіть, які фактори для вас є поштовхом до обговорення фінансових тем.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Розв'язування задач на уроках математики водночас є ціллю і засобом навчання. Цей процес займає значну частину шкільного курсу математики. Український математик-педагог З. Слєпкань виділяє чотири основні функції задач у шкільному курсі математики: навчальну, розвивальну, виховну і контрольну (Слєпкань, 2006). Виходячи з умов компетентнісного підходу до навчання, у відповідності до Державного стандарту профільної середньої освіти (2024) на нашу думку необхідно додати ще одну функцію – застосування математичних знань у практичних ситуаціях, зокрема під час розв'язування задач фінансового змісту. Зв'язок з економічними темами дозволяє реалізувати принцип єдності теорії та практики та сприяє розвитку підприємницької та фінансової грамотності.

Виходячи з наших досліджень можемо зазначити, що найбільш ефективною є форма постановки задачі, у фабулі якої наведені актуальні та реальні факти, показники, статистичні дані або запропоновано учням доповнити задачу необхідними даними для розв'язування самостійно.

Для актуалізації даних та розширення контексту задач під час уроків використовувалися QR-коди, що вели учнів до зовнішніх інформаційних ресурсів (офіційних статистичних даних, фінансових порталів, тощо). Наприклад, у задачах на сімейний бюджет чи інфляцію учням пропонувалося сканувати QR-код, аби перевірити актуальність використаних показників таких як курс валют, рівень інфляції, ставки податків за останніми даними Національного банку України. Наприклад, задачі такого змісту:

Задача 1. Сім'я Савчуків живе в Україні. У 2025 році їх сімейний чистий дохід становить 23 460 грн на місяць (середній показник першого кварталу 2025 року). Через інфляцію в травні ціни зросли на 1,3 %, а з початку року – на 5,6 %.

Обов'язкові щомісячні витрати складаються з комунальних послуг – 6 000 грн, продуктів харчування – 12 000 грн, витрати за навчання молодшого сина – 4 000 грн, інше – 7 000 грн. Метою є накопичити 60 000 грн за 12 місяців.



Завдання:

1. Складіть місячний звіт доходу, витрати, заощадження. Чи зможе сім'я досягти поставленої мети?
2. Проаналізуйте вплив інфляції на витрати. Чи збережеться рівень накопичень?
3. Запропонуйте шляхи досягнення мети (скорочення витрат, депозит, підробіток тощо).
4. Перевірте за QR- кодом актуальність даних на сьогоднішній день. Як зміниться період накопичення бажаної суми, якщо сім'я Савчуків почне накопичувати сьогодні? Що вплинуло на збільшення/зменшення цього періоду?

Задача 2. Олена планує інвестувати 100 000 € у біткоїн. Станом на 5 липня 2025 року курс 1 BTC \approx 4 506 930 €. За останній рік вартість зросла на \approx 93,6 %. Україна готує закон про оподаткування криптовалюти: стандартна ставка – 18 % ПДФО + 5 % військовий збір, або пільгова – 9 %.

Детальна інформація щодо законопроектів пов'язаних з криптовалютою:



Завдання:

1. Порахуйте, скільки BTC купить Олена на 100 000 €.
2. Обчисліть вартість BTC через рік при зростанні на 93,6 %.
3. Розрахуйте чистий дохід після оподаткування (23 % і 9 %).
4. Порівняйте варіанти оподаткування та зробити висновок.
5. Проаналізуйте ризики криптовалют (волатильність, зміни в законодавстві), скориставшись інформацією в QR-кодах.

Це нововведення сприяло розвитку не тільки фінансової обізнаності учнів, а й цифрової компетентності. Більше того, використання QR-кодів підвищило самостійність і мотивацію учнів до розв'язування поставленої проблеми. Вони отримали можливість самостійно перевіряти інформацію, ставити факти під сумнів, що надавало автономію у навчанні, заохочувало ініціативність та давало можливість реалізувати індивідуальний підхід до кожного учня.

Важливою складовою компетентнісних задач є навчальні дискусії та обговорення. Після розв'язання задачі учні обговорювали результати, ділилися своїми стратегіями та отриманими висновками. Такі обговорення значною мірою активізували критичне мислення старшокласників. По-перше, вони дозволяють відкрити різні підходи до розв'язування тієї чи іншої проблемної ситуації. По-друге, дискусія спонукала обґрунтовувати свої рішення, порівнювати альтернативи, шукати помилки в міркуваннях, наводити аргументи «за» і «проти». Такі інтерактиви під час уроку спонукають до розвитку лідерських якостей та ініціативності, вміння аргументувати свою позицію і виважено критикувати інші. По-третє, здобувачі освіти здобули навички чітко висловлювати свої думки, слухати опонентів, знаходити конструктивні рішення – що є основними елементами прояву підприємливості.

Для того аби досягнути поставленою мети при розв'язуванні задач - сформувати необхідні компетентності, вчителю необхідно заздалегідь продумати етапи розв'язування. В. Швець та Н. Першина для організації ефективної роботи під час розв'язування прикладних задач пропонують виокремити такі етапи: створення математичної моделі, дослідження

математичної моделі, відбір розв'язків прикладної задачі (Швец & Першина, 2022). Не заперечуючи попереднього та враховуючи власний педагогічний досвід ми модернізували їх та доповнили у відповідності до ефективної реалізації компетентнісного підходу: мотивація, ознайомлення з умовою, побудова математичної моделі, розв'язання математичної задачі, інтерпретація та аналіз, рефлексія. Розглянемо роль вчителя та учнів на кожному етапі на прикладі задачі 1 (див. Таблиця 1).

Таблиця 1. Модернізовані етапи розв'язування задачі

Етап розв'язування задачі	Дії вчителя	Дії учнів	Результат етапу
Мотивація	Ставить запитання до класу: «Чи завжди людина може накопичити бажану суму коштів? Що може завадити позитивному результату?».	Висловлюють власні думки, наводять приклади з власного життя (наприклад, як їм вдалося/не вдалося накопичити на новий телефон, похід у кіно, тощо).	Створено емоційний зв'язок з темою.
Ознайомлення з умовою задачі	Пропонує ознайомитися з умовою та розв'язати задачу. Акцентує увагу на тому, які фінансові терміни використані в умові задачі та уточнює чи зрозумілі вони для учнів. За необхідності знайомить учнів з фінансовими термінами.	Читають задачу, виокремлюють необхідні дані для розв'язування задачі (дохід, інфляція, тощо).	Визначено ключові дані задачі.
Побудова математичної моделі	Ставить уточнюючі запитання, записує на дошці формули за необхідності. Наприклад: «Як розрахувати дохід?», «Які математичні знання необхідні для врахування інфляції?».	Відповідають на питання: «Дохід – витрати = заощадження». Пояснюють дію відсотків для визначення впливу інфляції. Складають вирази для необхідних обчислень.	Складено вирази, необхідні для обчислень.
Розв'язання математичної задачі	Консультує, допомагає при математичних розрахунках, перевіряє правильність обчислень.	Роблять математичні розрахунки.	Формування обчислювальних навичок
Інтерпретація та аналіз результатів	Організовує дискусію, ставить запитання: «Чи є шанси досягти мети?», «Які альтернативні шляхи досягнення мети ви можете порадити сім'ї Савчуків?»	Пропонують шляхи досягнення цілі: зменшення витрат, додатковий зарібок, внесення заощадження на депозит.	Формування підприємницьких навичок
Рефлексія	Пропонує завершити фрази: «Я зрозумів...», «Я дізнався...».	Формулюють власні висновки.	Формування розуміння, що математика – інструмент необхідний у сучасному житті.

Джерело: авторська розробка.

Така схема була застосована в нашому експериментальному дослідженні, яке проводилося на базі Ліцею № 128 Дніпровського району м. Києва. У дослідженні взяли участь 40 учнів ліцею 11 класу. Результати анкетування засвідчили позитивний вплив використання прикладних задач фінансового змісту. До впровадження задач такого типу лише 40% учнів зазначали, що математичні знання необхідні для розуміння фінансових процесів. Після розв'язування циклу задач цей показник зріс до 80%. Частка учнів, які змогли пояснити поняття «інфляція», «депозит», «податок» збільшилася з 50% до 85%. 70% учнів зазначили, що після уроків почали обговорювати фінансові теми вдома, а 65% створювати план досягнення фінансових цілей. Тож, наведена вище модель етапів розв'язування прикладних задач зарекомендувала себе ефективною та доречною для формування компетентності «підприємливість та фінансова грамотність» у старшокласників.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Підсумовуючи зміст статті можна стверджувати, що розв'язування математичних задач є одним з ефективних засобів навчання для формування компетентності «підприємливість та фінансова грамотність» на уроках математики. Задачі такого типу не лише розвивають обчислювальні навички, а й сприяють умінню застосувати математичні знання у практичних життєвих ситуаціях, які пов'язані з особистими фінансами, плануванням особистого бюджету та прийняттям економічних рішень.

Використання QR-кодів у фабулах задач забезпечило інтеграцію навчання з цифровими інструментами, підвищило мотивацію учнів та розвинуло їх вміння самостійно використовувати інформаційний ресурс, критично оцінювати та перевіряти її актуальність.

Організація навчальних дискусій після виконання завдань забезпечує формування підприємницької компетентності: розвиває критичне мислення, навички аргументації, дає можливість проявити ініціативу.

Таким чином, розв'язування прикладних задач фінансового змісту на уроках математики виступає не лише засобом навчання, але й дієвим інструментом розвитку фінансової культури та підприємницьких навичок учнів старшої школи. Перспективи подальших досліджень убачаємо в розширенні практики використання цифрових ресурсів, інтерактивних методів та розробці системи завдань, адаптованих до різних рівнів математичної підготовки, а також включення компетентнісних задач у підручники та створення їх добірок відповідно до змістових ліній шкільного курсу математики.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів.

ФІНАНСУВАННЯ

Дослідження не отримувало зовнішнього фінансування.

ДОСТУПНІСТЬ ДАНИХ

Це дослідження не передбачало використання окремих наборів даних.

ВИКОРИСТАННЯ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

У процесі підготовки статті автор використовував ChatGPT для того, щоб перевірити граматику частини тексту, яка написана англійською мовою. Після використання цього інструменту автор переглянув й відредагував текст та несе повну відповідальність за зміст опублікованого рукопису.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бурда, М., & Васильєва, Д. (2017). Особливості навчання математики за новими програмами. *Математика в рідній школі*, 7–8, 2–9.
2. Войтицька, Л., & Ролік, В. (2023). *Опитування з фінансової грамотності серед підлітків 11–18 років в Україні*. Національний банк України. <https://talan.bank.gov.ua/uploads/ekspertyza/files/gmw-2023-survey-teens-64707f2a6d2d4221260570.pdf>
3. Захаркіна, Л. С., & Катериніна, М. П. (2014). Підвищення рівня фінансової грамотності населення України. *Економічний форум*, 4, 200–207. http://nbuv.gov.ua/UJRN/ecfor_2014_4_34
4. Інститут модернізації змісту освіти. (2025, вересень 19). *Програмне та навчально-методичне забезпечення курсу у старшій школі*. <https://imzo.gov.ua/kurs-finanova-gramotnist/programne-ta-navchalno-metodichne-zabezpechennya-kursu/>
5. Кізима, Т. О. (2012). Фінансова грамотність населення: зарубіжний досвід і вітчизняні реалії. *Вісник ТНЕУ*, 2, 64–71.
6. Кучерова, Г. Ю. (2013). Шляхи розвитку фінансової культури населення. *Вісник Східноєвропейського університету економіки і менеджменту*. Серія: Економіка і менеджмент, 2, 125–131. http://nbuv.gov.ua/jpdf/Vsuem_2013_2_18.pdf
7. *Про затвердження Державного стандарту профільної середньої освіти*, Постанова Кабінету Міністрів України № 851 (2024) (Україна). <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/851-2024-n#Text>
8. Слєпкань, З. І. (2006). *Методика навчання математики* (2-ге вид., допов. і переробл.). Київ: Вища школа.
9. Смовженко, Т., & Кузнєцова, А. (2013). Впровадження фінансової грамотності в Україні: сучасний стан і перспективи. *Вісник НБУ*, вересень, 8–16.
10. Швець, В., & Першина, Н. (2022). Формування умінь математичного моделювання під час розв'язування прикладних задач економічного змісту. *Фізико-математична освіта*, 33(1), 57–62. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-033-1-010>
11. Швець, В., & Черненко, А. (2024). Формування в учнів базової середньої школи мотивів отримувати знання про фінансово-підприємницьку діяльність під час вивчення алгебри. *Освіта. Інноватика. Практика*, 12(3), 83–92. <https://doi.org/10.31110/2616-650X-vol12i3-012>
12. Amagir, A., Groot, W., van den Brink, H. M., & Wilschut, A. (2020). Financial literacy of high school students in the Netherlands: Knowledge, attitudes, self-efficacy, and behavior. *International Review of Economics Education*, 34, 100185. <https://doi.org/10.1016/j.iree.2020.100185>
13. European Training Foundation. (2023). *Entrepreneurial potential of youth in Ukraine*. Torino: ETF.
14. Hernández-Martínez, M., Posso-Yépez, M., Cadena-Povea, H., Rivadeneira-Flores, J., & Placencia-Enríquez, F. (2025). ICT for the development of mathematical competencies in secondary education: A systematic review. *Cogent Education*, 12(1), 2511038.
15. National Bank of Ukraine. (2020). *National Strategy for Financial Literacy in Ukraine until 2030*. <https://bank.gov.ua/en/about/strategy-fin-literacy>
16. Salas-Velasco, M. (2025). Non-experimental impact estimates of school financial education exposure on financial literacy outcomes. *Economía Política*, 1–25.
17. Skagerlund, K., Lind, T., Strömbäck, C., Tinghög, G., & Västfjäll, D. (2018). Financial literacy and the role of numeracy – How individuals' attitude and affinity with numbers influence financial literacy. *Journal of Behavioral and Experimental Economics*, 74, 18–25.
18. UNDP. (2021). *SCORE survey: Social cohesion and reconciliation index for Ukraine*. Kyiv: UNDP.
19. USAID. (2021). *Financial literacy survey of the population of Ukraine (based on OECD/INFE methodology)*. Kyiv: USAID.
20. Vilalta Riera, A., Deulofeu Piquet, J., & Morera Úbeda, L. (2024). Enriching math teaching guides from a competency-based perspective. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 20(7), em2477. <https://doi.org/10.29333/ejmste/14761>
21. Zhou, Y., Yang, M., & Gan, X. (2023). Education and financial literacy: Evidence from compulsory schooling law in China. *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 89, 335–346.
22. Zlatkin-Troitschanskaia, O., Shavelson, R. J., & Bartnik, T. N. (2025). What have we learned about modelling and assessing mathematics teachers' competence? – Insights from a literature review. *ZDM Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/s11858-025-01689-w>

REFERENCES (TRANSLATED AND transliterated)

1. Burda, M., & Vasylieva, D. (2017). Osoblyvosti navchannia matematyky za novymy prohramamy [Peculiarities of teaching mathematics according to new programs]. *Matematyka v ridnii shkoli – Mathematics in the native school*, 7–8, 2–9. (in Ukrainian).

2. Voitytska, L., & Rolik, V. (2023). *Opytyvannia z finansovoi hramotnosti sered pidlitkiv 11–18 rokiv v Ukraini [Survey on financial literacy among adolescents aged 11–18 in Ukraine]*. Natsionalnyi bank Ukrainy. <https://talan.bank.gov.ua/uploads/ekspertyza/files/gmw-2023-survey-teens-64707f2a6d2d4221260570.pdf> (in Ukrainian).
3. Zakharkina, L. S., & Katerynina, M. P. (2014). Pidvyshchennia rivnia finansovoi hramotnosti naselennia Ukrainy [Increasing the level of financial literacy of the population of Ukraine]. *Ekonomichnyi forum – Economic Forum*, 4, 200–207. http://nbuv.gov.ua/UJRN/ecfor_2014_4_34 (in Ukrainian).
4. Instytut modernizatsii zmistu osvity. (2025, veresen 19). *Prohramne ta navchalno-metodychne zabezpechennia kursu u starshii shkoli [Program and educational and methodological support of the course in high school.]*. <https://imzo.gov.ua/kurs-finansova-gramotnist/programne-ta-navchalno-metodychne-zabezpechennya-kursu/> (in Ukrainian).
5. Kizyma, T. O. (2012). Finansova hramotnist naselennia: zarubizhnyi dosvid i vitchyzniani realii [Financial literacy of the population: foreign experience and domestic realities]. *Visnyk TNEU – Bulletin of the Eastern European University of Economics and Management*, 2, 64–71. (in Ukrainian).
6. Kucherova, H. Yu. (2013). Shliakhy rozvytku finansovoi kultury naselennia [Ways to Develop the Financial Culture of the Population]. *Visnyk Skhidnoevropeiskoho universytetu ekonomiky i menedzhmentu. Seriya: Ekonomika i menedzhment – Bulletin of the Eastern European University of Economics and Management. Series: Economics and Management*, 2, 125–131. http://nbuv.gov.ua/jpdf/Vsuem_2013_2_18.pdf (in Ukrainian).
7. *Pro zatverdzhennia Derzhavnogo standartu profilnoi serednoi osvity, Postanova Kabinetu Ministriv Ukrainy № 851 [On Approval of the State Standard of Specialized Secondary Education, Resolution of the Cabinet of Ministers of Ukraine No. 851]* (2024) (Ukraine). <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/851-2024-p#Text> (in Ukrainian).
8. Sliepkan, Z. I. (2006). *Metodyka navchannia matematyky (2-he vyd., dopov. i pererobl.) [Mathematics Teaching Methodology (2nd ed., supplemented and revised)]*. Kyiv: Vyshcha shkola. (in Ukrainian).
9. Smovzhenko, T., & Kuznietsova, A. (2013). Vprovadzhennia finansovoi hramotnosti v Ukraini: suchasnyi stan i perspektyvy [Implementation of Financial Literacy in Ukraine: Current Status and Prospects]. *Visnyk NBU – Bulletin of the National Bank of Ukraine, veres.*, 8–16. (in Ukrainian).
10. Shvets, V., & Pershyna, N. (2022). Formuvannia umin matematychnoho modeliuvannia pid chas rozviazuvannia prykladnykh zadach ekonomichnogo zmistu [Formation of mathematical modeling skills during solving applied problems of economic content]. *Fyzyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, 33(1), 57–62. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-033-1-010> (in Ukrainian).
11. Shvets, V., & Chernenko, A. (2024). Formuvannia v uchniv bazovoi serednoi shkoly motyviv otrymuvaty znannia pro finansovo-pidpriemnytsku diialnist pid chas vyvchennia alhebry [Formation of motives in students of basic secondary school to acquire knowledge about financial and entrepreneurial activities during the study of algebra]. *Osvita. Innovatyka. Praktyka – Education. Innovation. Practice*, 12(3), 83–92. <https://doi.org/10.31110/2616-650X-vol12i3-012> (in Ukrainian).
12. Amagir, A., Groot, W., van den Brink, H. M., & Wilschut, A. (2020). Financial literacy of high school students in the Netherlands: Knowledge, attitudes, self-efficacy, and behavior. *International Review of Economics Education*, 34, 100185. <https://doi.org/10.1016/j.iree.2020.100185>
13. European Training Foundation. (2023). *Entrepreneurial potential of youth in Ukraine*. Torino: ETF.
14. Hernández-Martínez, M., Posso-Yépez, M., Cadena-Povea, H., Rivadeneira-Flores, J., & Placencia-Enríquez, F. (2025). ICT for the development of mathematical competencies in secondary education: A systematic review. *Cogent Education*, 12(1), 2511038.
15. National Bank of Ukraine. (2020). *National Strategy for Financial Literacy in Ukraine until 2030*. <https://bank.gov.ua/en/about/strategy-fin-literacy>
16. Salas-Velasco, M. (2025). Non-experimental impact estimates of school financial education exposure on financial literacy outcomes. *Economia Politica*, 1–25.
17. Skagerlund, K., Lind, T., Strömbäck, C., Tinghög, G., & Västfjäll, D. (2018). Financial literacy and the role of numeracy – How individuals' attitude and affinity with numbers influence financial literacy. *Journal of Behavioral and Experimental Economics*, 74, 18–25.
18. UNDP. (2021). *SCORE survey: Social cohesion and reconciliation index for Ukraine*. Kyiv: UNDP.
19. USAID. (2021). *Financial literacy survey of the population of Ukraine (based on OECD/INFE methodology)*. Kyiv: USAID.
20. Vilalta Riera, A., Deulofeu Piquet, J., & Morera Úbeda, L. (2024). Enriching math teaching guides from a competency-based perspective. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 20(7), em2477. <https://doi.org/10.29333/ejmste/14761>
21. Zhou, Y., Yang, M., & Gan, X. (2023). Education and financial literacy: Evidence from compulsory schooling law in China. *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 89, 335–346.
22. Zlatkin-Troitschanskaia, O., Shavelson, R. J., & Bartnik, T. N. (2025). What have we learned about modelling and assessing mathematics teachers' competence? – Insights from a literature review. *ZDM Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/s11858-025-01689-w>

| Матеріал надійшов до редакції: 24.08.2025 р. | Прийнято до друку: 19.10.2025 р. | Опубліковано: 28.11.2025 р. |



МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ОСНОВ ФІНАНСОВОЇ ГРАМОТНОСТІ В КУРСІ МАТЕМАТИКИ 8 КЛАСУ НУШ

Олександр ШКОЛЬНИЙ ✉

Український державний університет
імені Михайла Драгоманова, Україна
o.v.shkolnyi@udu.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0002-3131-1915>

METHODOLOGICAL FEATURES OF STUDYING THE BASICS OF FINANCIAL LITERACY IN THE 8TH GRADE MATHEMATICS COURSE OF NUS

Oleksandr SHKOLNYI ✉

Dragomanov Ukrainian State University, Ukraine
o.v.shkolnyi@udu.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0002-3131-1915>

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. У сучасних умовах важливим аспектом розвитку особистості учнів є їх обізнаність у сфері фінансових розрахунків. Крім того, підприємливість та фінансова грамотність є однією з 11 ключових компетентностей, формування якої передбачено чинними державними державні документами, що регулюють освітню діяльність в Україні, зокрема, концепції реалізації реформи Нова українська школа (НУШ). Аналіз джерел щодо впровадження основ фінансової грамотності в навчальний процес показав, що наразі воно знаходиться лише на початковому етапі і має суттєві національні особливості, порівняно з аналогами в інших країнах світу.

Метою статті є детальний виклад методичних особливостей вивчення основ фінансової грамотності учнів 8 класів НУШ на уроках математики з метою належного формування відповідної ключової компетентності, передбаченої Державним стандартом базової середньої освіти, за авторськими навчальними матеріалами.

Матеріали і методи. Було використано теоретичний аналіз методичної літератури, порівняльний аналіз, систематизацію та узагальнення наявних теоретичних досліджень з тематики статті, а також педагогічне спостереження та узагальнення власного педагогічного досвіду щодо навчання математики у 8 класі НУШ.

Результати. Згідно з модельною програмою та підручниками, одним із авторів яких є автор цієї статті, розділ "Основи фінансової грамотності", який поєднує матеріал двох параграфів "Формули простих та складних відсотків і дисконтів та їх застосування" і "Датовані суми. Еквівалентні суми при заданій відсотковій ставці" вводиться в курс математики 8 класу НУШ. Цей матеріал є переважно новим для українських учителів математики, а отже, як сам теоретичний матеріал, так і його методичні особливості його слід ретельно пояснювати. Таке пояснення реалізоване в самому підручнику, у книзі для вчителя, а також у додаткових інтерактивних матеріалах (навчальних відео), створених авторським колективом програми і підручника. У статті наводяться методичні коментарі до найбільш складного для розуміння учнями теоретичного матеріалу та методичні поради щодо організації вивчення цього матеріалу.

Висновки. Як показує опитування учнів під час апробації підручника та опитування вчителів математики, які проводили цю апробацію, наведені підходи до навчання учнів основам фінансової грамотності добре сприймаються підлітками. Результати контрольних заходів також показують, що цей матеріал є доступним і зрозумілим для більшості учнів, які його вивчали. Також усі опитані вчителі самі добре розібралися у відповідному теоретичному матеріалі, причому внаслідок належної співпраці з

ABSTRACT

Formulation of the problem. In modern conditions, an important aspect of the development of students' personality is their awareness in the field of financial calculations. In addition, "entrepreneurship and financial literacy" is one of the 11 key competencies, the formation of which is provided for by current state documents regulating educational activities in Ukraine, in particular, the concept of implementing the New Ukrainian School (NUS) reform. Analysis of sources on the introduction of the basics of financial literacy into the educational process showed that it is currently only at the initial stage and has significant national characteristics, compared with analogues in other countries of the world.

The purpose of the article is a detailed presentation of the methodological features of studying the basics of financial literacy of 8th grade NUS students in mathematics lessons in order to properly form the corresponding key competency provided for by the State Standard of Basic Secondary Education, using the author's educational materials.

Materials and methods. Theoretical analysis of methodological literature, comparative analysis, systematization, and generalization of existing theoretical research on the topic of the article were employed, as well as pedagogical observation and generalization of one's own pedagogical experience in teaching mathematics to 8th-grade students at the National Secondary School.

Results. According to the model educational program and textbooks, one of the authors of which is the author of this article, the section "Fundamentals of Financial Literacy", which combines the material of the two paragraphs "Formulas of Simple and Compound Interest and Their Application" and "Dated Amounts. Equivalent Amounts at a Given Interest Rate" is introduced into the mathematics course for the 8th grade of the National Secondary School. This material is largely new to Ukrainian mathematics teachers; therefore, both the theoretical content itself and its methodological features should be carefully explained. Such an explanation is implemented in the textbook itself, in the teacher's book, as well as in additional interactive materials (educational videos) created by the author team of the educational program and the textbook. The article offers methodological comments on the most challenging theoretical material for students to understand, as well as methodological advice on organizing the study of this material.

Conclusions. As shown by the survey of students during the probation of the textbook and the survey of mathematics teachers who conducted this probation, the presented approaches to teaching students the basics of financial literacy are well received by adolescents. The results of control measures also show that this material is accessible and understandable for the majority of students who studied it. Also, all the surveyed teachers themselves understood the relevant theoretical material

авторським колективом підручника та за допомогою книги для вчителя, цей процес не викликав у них значних труднощів. Ми вважаємо, що проведена апробація авторських навчальних матеріалів показує, що описані в статті методичні підходи до вивчення основ фінансової грамотності є корисними і забезпечать належне формування відповідної ключової компетентності учнів, передбаченої Державним стандартом базової середньої освіти.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: Нова українська школа; Державний стандарт базової середньої освіти; модельна навчальна програма з математики; підручник з математики; ключові компетентності; підприємливість і фінансова грамотність.

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Shkolnyi O. Methodological features of studying the basics of financial literacy in the 8th-grade mathematics course of NUS. *Фізико-математична освіта*, 2025. Том 40. № 5. С. 74-79. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i5-10>.

well, and as a result of proper cooperation with the author's team of the textbook and with the help of a book for teachers, this process did not cause them significant difficulties. We believe that the author's educational materials demonstrate the effectiveness of the methodological approaches to studying the basics of financial literacy described in the article, which will ensure the proper development of the relevant key competence in students, as stipulated in the State Standard of Basic Secondary Education.

KEYWORDS: New Ukrainian School; State Standard of Basic Secondary Education; model mathematics program; mathematics textbook; key competencies; entrepreneurship and financial literacy.

FOR CITATION: Shkolnyi, O. (2025). Methodological features of studying the basics of financial literacy in the 8th grade mathematics course of NUS. *Physical and Mathematical Education*, 40(5), 74-79. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i5-10>.

INTRODUCTION

Problem statement. Analysis of current research. In modern conditions, an important aspect of the development of students' personality is their awareness in the field of financial calculations. In addition, entrepreneurship and financial literacy are one of the 11 key competencies, the formation of which is provided for by current state documents regulating educational activities in Ukraine (MES of Ukraine 2016, Cabinet 2018, Cabinet 2020, Cabinet 2024). Therefore, in the model educational program for the integrated course "Mathematics" for grades 7-9 (Vasylyshyn et al. 2023), in order to implement this requirement, it is proposed to study the basics of financial literacy, in particular, simple and compound interest and discounts, dated amounts, equivalent amounts and their series, as well as simple cumulative payments. The methodological features of this program are described in detail in the article (Shkolnyi 2023). We would just like to note here that this model program is the only one that proposes introducing financial literacy into the school mathematics course as a separate content line.

According to the mentioned model program, the author team consisting of Oleksandr Shkolnyi, Yevhen Nelin, Andriy Mylianyk and Yuliia Prostavkova is creating a line of textbooks for grades 7-9 (Shkolnyi et al. 2024a, Shkolnyi et al. 2025a), as well as a methodological kit for them, which includes a teacher's manual, a collection of materials for current formative and summative assessment, a collection of tasks, as well as interactive materials (see, Shkolnyi et al. 2024b, Shkolnyi et al. 2025b, Shkolnyi et al. 2024c). Currently, materials for grades 7 and 8 of the New Ukrainian School (NUS) have been tested, published and are used in the educational process in schools in Ukraine, and materials for grade 9 are being prepared for publication.

It should be noted that not many publications in scientific journals are devoted to the problem of forming the key competence "entrepreneurship and financial literacy" for Ukrainian schoolchildren in basic secondary schools, in particular, on mathematics lessons, and we did not find any systematic methodological studies on this subject at all. The available publications (for example, Kizima et al. 2017, Smovzhenko et al. 2020, Pysmennyi 2023) mainly concern the teaching of financial literacy in high school or in specialized educational institutions with in-depth study of the basics of economics and entrepreneurship. There are also separate online courses for teenagers who want to independently improve their level of financial literacy (for example, <https://studbiz.in.ua/>, <https://talan.bank.gov.ua/> and others).

It is also clear that foreign publications on this topic, of which there are many (see, for example, Amagir et al. 2020, Cameron et al. 2014, OECD 2024, Sohn et al. 2012, etc.), are mostly of little application to Ukrainian realities, since they do not take into account the peculiarities of the educational process in our country, especially during the implementation of the New Ukrainian School reform. In addition, currently, Ukrainian adolescents, due to martial law, are in special conditions and require a different approach to learning from the traditional ones (more details about teaching mathematics under martial law in Ukraine are described in the article Matias & Shkolnyi 2025).

In the context of developing entrepreneurship and financial literacy at the level of basic secondary education, a separate model curriculum for the course "Entrepreneurship and Financial Literacy" for students in grades 8-9 of general secondary education institutions (Bespalko et al., 2023), recommended by the Ministry of Education and Science of Ukraine for use in the educational process, deserves attention. Its introductory part, in particular, states the low level of financial education of Ukrainian youth aged 18-19 (data are based on the 2021 USAID project "Financial Sector Transformation" - see Vitka 2021).

The Entrepreneurship and Financial Literacy program provides for the study of the following topics: "Formation of financial culture" and "Fundamentals of human financial literacy" - grade 8; "Money and its purpose", "Banking and non-banking financial institutions", "Basic financial services", "Protection of the rights of consumers of financial services", "Fundamentals of entrepreneurship" - grade 9. Analysis of the program content shows that it performs a predominantly ideological function, expanding the horizons of students in the field of financial literacy without much detailing the method of making financial calculations. In our opinion, this course alone is not enough for the proper formation of the "entrepreneurship and financial literacy" competence; systematic efforts of representatives of other educational fields, in particular, mathematics, are required.

Therefore, *the purpose of our work* is to provide a detailed description of the methodological features of studying the basics of financial literacy of 8th-grade students of the New Ukrainian School in mathematics lessons in order to properly form the corresponding key competence provided for by the State Standard of Basic Secondary Education, using the author's educational materials.

METHODS OF THE RESEARCH

To achieve the study's goal, we employ a theoretical analysis of methodological literature related to the chosen topic. Also, as an empirical method, we use surveys of teachers and students, as well as observation of the educational process in secondary schools during the testing of teaching materials in mathematics for grades 7-8 of the New Ukrainian School. In this article, we also operate with various methods of scientific knowledge: comparative analysis to clarify different points of view on the problem; systematization and generalization to formulate conclusions and recommendations on the formation of financial literacy of students in grades 7-9 in mathematics lessons; we also summarize our own pedagogical experience and observations of the authors on the process of teaching mathematics in Ukrainian schools.

RESULTS OF RESEARCH

According to the model educational program (Vasylyshyn et al., 2023), the study of the basics of financial literacy in the integrated course "Mathematics" for grades 7-9 begins in grade 8. The corresponding section of the textbook (Shkolnyi et al., 2025a) is entitled "Basics of Financial Literacy", which combines two paragraphs: "Formulas of Simple and Compound Interest and Discounts and Their Application" and "Dated Amounts. Equivalent Amounts at a Given Interest Rate".

The first paragraph ("Formulas for simple and compound interest and discounts and their applications") studies the formulas for simple interest and discounts and their practical applications. A feature of this and partly the following second paragraph of the section of the paragraph is that they contain a large amount of terminology that is new to students. The motivation to study simple and compound interest is natural, since they are constantly used in financial calculations. Let us cite in full volume the dialogue between Petryk and Tetianka at the beginning of the paragraph, which serves as a motivation for studying the educational material (Shkolnyi et al., 2025a).

Petryk. Listen, Tetianka, yesterday I saw a strange advertisement on the street: "Hurry up and open a deposit in our bank! We guarantee 24% per annum monthly in hryvnia and 8% per annum semi-annually in dollars and euros!" You may not know what this means.

Tetianka. Honestly, I also find it strange how annual interest can be monthly or semi-annual. I also don't always understand these financial advertisements. For example, I recently heard from my parents that one of the Internet providers offers a profitable discount for regular customers - 18% per annum for 4 months. I am extremely curious what this means!

Petryk. I know that in translation from English, "znyzhka" means a discount. And I once read about a deposit on the Internet. This is money that the bank has accepted from the depositor for a certain period of storage at interest. Therefore, it seems to me that when making deposits, the amount of money in the client's account increases over time in a certain way, and when making a discount, the cost of services decreases for some time in a certain way.

Tetianka. Everything is logical, but it's better to ask the teachers, because knowing for sure is always better than guessing.

Next, teachers provide all the definitions of concepts necessary for understanding (interest funds, initial and final amounts, interest rate, simple interest, annual interest rate, loan period, bank discount, repayment amount, revenue, interest rate, annual discount rate, discount period). All introduced definitions are illustrated with examples that allow students to better understand the essence of the introduced concepts and learn to recognize, in particular, initial and final amounts, interest funds, revenue, repayment amount, as well as calculate the interest and discount rate for a simple and complex scheme of interest and discount accrual.

It is worth noting that most mathematics teachers in Ukrainian schools encounter the above concepts for the first time, and therefore, mastering them may cause some difficulties. For example, in financial mathematics, interest is not the number of hundredths of a whole, but the funds that an individual receives as a result of certain financial transactions. It is also important in problems to distinguish the rate of interest or discount from the equal interest or discount rate. A certain feature of financial calculations when solving problems on simple interest or discounts is that, for the convenience of calculations, it is assumed that the length of the year is not 365, but 360 days.

The most difficult material to understand in the paragraph "Formulas for Simple and Compound Interest and Discounts and Their Applications" is the relationship between the formulas for simple interest and simple discounts. We will provide the corresponding explanation from the textbook (Shkolnyi et al. 2025a) in full.

The simple interest and discount formulas are related, and it is no coincidence that the initial and final sums in the simple interest formula coincide with the proceeds and repayment amounts in the simple discount formula. Consider the following example.

Example. Let Mr. Dmytro pay the bank UAH 10,000. If 5 months before maturity, the bank sells this obligation to Ms. Oksana for UAH 9,500, then the repayment amount $S = \text{UAH } 10,000$, bank revenue $P = \text{UAH } 9,500$, and discount $D = S - P = \text{UAH } 500$. The discount rate in this case $j = \frac{500}{10000} \cdot 100\% = 5\% = 0,05$.

However, when Ms. Oksana buys Mr. Dmytro's bond before its maturity date, she is effectively borrowing money from the bank and owning the bond as a security. On the maturity date, Ms. Oksana will receive UAH 10,000 from Mr. Dmytro and will receive UAH 500 in profit on her UAH 9,500 investment. For Ms. Oksana, UAH 9,500 can be considered the initial deposit amount, the bank's discount of UAH 500 as her own interest funds, and the repayment amount of UAH 10,000 as the final amount. It is clear that the interest rate Ms. Oksana will receive on her investment will not align with the bank's discount rate. Indeed, the bank discount rate in this case is 5%. If we consider UAH 500 as interest funds on Ms. Oksana's UAH 9,500 investment, then the interest rate $i = \frac{500}{9500} \cdot 100\% = \frac{100}{19}\% \approx 5,26\%$.

The annual interest rate for this case will also be different from the annual discount rate. Indeed, the discount rate $d = 5\%: \frac{5}{12} = 12\%$, and the annual interest rate $r = \frac{100}{19}\%: \frac{5}{12} = \frac{240}{19}\% \approx 12,63\%$. The relationship between annual interest and discount rates is derived from the equality $I = D$ that is, $Prt = Sdt$ or $Pr = Sd$. In their financial activities, banks may use both of these rates for discounting. Therefore, one should be careful not to confuse them.

This example makes it clear why the letters in the simple interest formula ($S = P(1 + rt)$) and the simple discount formula ($P = S(1 - dt)$) are coincide, and how exactly the simple interest rate and the simple discount rate are related to each other. A sufficient number of examples given in the “gym” of the textbook for this section (this is what the authors call the system of problems for each of the textbook paragraphs divided into four levels of complexity) should be considered so that students can well understand this difference. The understanding of simple interest and simple discounts and the connection between them will also be facilitated by two specific examples given in the textbook with a full solution and comments to it immediately after the theoretical material cited above.

The second part of the paragraph "Formulas for simple and compound interest and discounts and their application" contains information about compound interest and discounts. Here the definitions of the following concepts are introduced: compound sum, compound interest, conversion period, effective annual interest rate, present value of the contribution, compound discount. Then the formulas for compound interest are proved ($S = P(1 + i)^n$, where P – first initial amount, i – interest rate for the conversion period, n – number of conversion periods) and the compound discount formula ($P = S(1 + i)^{-n}$). It should be noted that although the letter designations in the compound discount formula are the same as those in the compound interest formula, they have a different economic meaning: amount P is considered the present value of the contribution S , and the difference $S - P$ is called a compound discount.

It is also important that the theoretical material of the paragraph answers the questions of children from the motivational block at the beginning. Indeed, the concept of annual interest rate is first introduced: “Similar to simple interest, when calculating a compound sum, the annual interest rate is used, indicating the number of conversion periods per year. If the number of conversion periods per year is m , then the annual interest rate is denoted by r_m . It is obvious that the interest rate for the conversion period $i = \frac{r_m}{m}$.” (Shkolnyi et al. 2025a) After this definition, it becomes clear that in the motivational block, 24% per annum per month means the interest rate $i = \frac{r_{12}}{12} = 2\%$ per month.

It is clear that solving problems on simple and complex interest and discounts requires performing many routine calculations, for which it is convenient to use computing equipment - a calculator or spreadsheets. The corresponding educational videos on this topic, provided in the electronic appendix to the textbook, will be useful to 8th grade students. These educational videos are available to students using QR codes provided in the textbook. We should also emphasize that in the textbook (Shkolnyi et al. 2025a) the use of educational videos is systematic, not fragmentary. These videos are the same part of the textbook as the printed text; they are mandatory for students to study, and are not auxiliary in nature.

The development of the ability to use computing tools to solve financial problems deserves due attention and sufficient time. Therefore, given the small size of the financial literacy section, teachers should allocate sufficient teaching time to it during their lesson planning. This time, in particular, will be spent on mastering computer programs such as Excel, which facilitate calculations when solving financial problems.

The second paragraph of the section devoted to financial literacy (“Dated amounts. Equivalent amounts at a given interest rate”) concerns the study of dated amounts and equivalent payments at a given interest rate. The motivational block of the paragraph provides examples of situations that confirm that comparing amounts of money without specifying the date is incorrect. Let us cite the corresponding dialogue between Petryk and Tetianka from the textbook (Shkolnyi et al. 2025a).

Tetianka. Listen, Petryk, I recently heard a strange phrase on the bus, which a lady said on the phone: “It’s better to take 1000 UAH now than 1500 UAH in a year, because money is not worth as much now as it used to be.” How can money be worth anything? In my opinion, it’s products or things that are worth something, and they are mostly bought for money.

Petryk. The phrase is really a bit strange, but I agree that comparing amounts of money without knowing the date when they were received will not work. Because money depreciates over time, even in the most developed countries. For example, in O’Henry’s stories, you can read that you could rent an apartment for 8 dollars a week, and now in the USA, it’s difficult to even have lunch in a cafe for that kind of money!

Tetianka. That’s true. My dad says that money should work. That is, there is no point in simply accumulating cash for a long time; it is better to put it in a bank or invest it in a project at a certain percentage. Then the interest will at least compensate for the depreciation, and maybe even give some profit.

Petryk. Logically. And the bank, in turn, will also invest the funds received from depositors somewhere at a certain percentage and receive profit, from which it pays interest to depositors. Listen, it turns out that the bank also pays money for the use of funds! That is, for the bank, your contribution to the deposit account will cost a certain amount of money for using it, and therefore, your money may cost other money. Very, very interesting, I want to learn more about this!

It is precisely because of the incorrectness of comparing amounts without a date that the concept of a dated amount is introduced: “The amount of a payment together with the date of its payment is called a dated amount. For example, if the borrower is to pay 3,000 UAH on February 3, 2030, then this is a dated amount.” (Shkolnyi et al., 2025a) Dated amounts can be compared by introducing the concept of equivalence of two dated amounts: “Two dated amounts are called equivalent if, at a given interest rate, their present values are the same.” From this definition, the rule of equivalence of two dated amounts is derived: “Let, at an interest rate i , the amounts A and B must be paid, respectively, after a and b conversion periods from the present time. Then the amounts A and B will be equivalent if $B = A(1 + i)^{b-a}$.” (Shkolnyi et al. 2025a) The last equality is called *the basic equation of equivalence* of dated amounts. The following are examples of finding equivalent amounts for given numbers of conversion periods from the present time with a complete solution and appropriate detailed comments. It is worth considering a sufficient number of such examples for a better understanding of students. They are given in the “gym” of the textbook to this paragraph.

A generalization of the rule of equivalence of two dated amounts is the rule for calculating the equivalent amount of a series of payments: “Let, at interest rates i , the amounts A , B , and C be paid respectively after a , b , and c conversion periods from the present time. Then the amount C will be equivalent to the series of payments A and B if $C = A(1 + i)^{c-a} + B(1 + i)^{c-b}$.” (Shkolnyi et al. 2025a) This rule is simply derived using the basic equation of equivalence of dated amounts. Usually, the amount

equivalent to a series of payments in practice needs to be found if it is planned to replace several payments (for example, on a loan) with a single payment. A specific example of such an application of the rule for calculating the equivalent amount of a series of payments is given in the textbook: "A bank provides loans at an annual interest rate of $r_4 = 12\%$. Mr. Mykhailo was supposed to return 5,000 UAH to this bank in a year, another 5,000 UAH in 2 years, and another 5,000 UAH in 3 years, but decided to repay the loan in one payment in 2.5 years. Let's find the amount Mr. Mykhailo has to pay according to his decision." (Shkolnyi et al. 2025a) A full solution with comments is given for this problem. Also, in the "gym" for this paragraph, a sufficient number of similar problems of different levels of complexity are given.

Equivalence can also be established between two series of payments. The textbook gives the following definition of equivalent series of payments: "Two series of payments are called equivalent if the amounts equivalent to each of these series of payments on the same date coincide." (Shkolnyi et al. 2025a) The equivalence equation for two series of payments is then derived: "Let for the interest rates i amounts $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_m$ must be paid accordingly through $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m$ conversion periods from now, and u – arbitrary moment in time. Then the series of payments A_1, A_2, \dots, A_n and B_1, B_2, \dots, B_m will be equivalent if $A_1(1+i)^{u-a_1} + \dots + A_n(1+i)^{u-a_n} = B_1(1+i)^{u-b_1} + \dots + B_m(1+i)^{u-b_m}$ " (Shkolnyi et al. 2025a) An example of using the last equation for a specific situation of replacing one series of payments with another is given in the educational video, which is presented in the textbook immediately after the formulated definitions. Also, several similar problems are given in the system of problems to this paragraph.

We believe that all 8th grade students should be able to apply the basic equivalence equation for two dated amounts. Problems using equivalence equations for series of payments are technically more complex. Therefore, all students should be able to understand the essence and write down the equation of equivalence of a series of payments to one payment and the equation of equivalence of a series of two series of payments, but the ability to solve the corresponding equations to find unknown amounts should be required only from students who are studying at a sufficient and high level of educational achievements. This ideology is reflected in the system of problems to this paragraph: at the initial level, you need to find the number of conversion periods, the interest rate at the annual interest rate, and also write down the equivalence equation for two dated amounts; at the intermediate level, you need to find a dated amount equivalent to another dated amount, and also write down the equivalence equation for one dated amount of a series of two dated amounts; at a sufficient level - find a dated sum equivalent to a series of two dated sums and write an equivalence equation between two series of dated sums; at a high level - find a series of dated sums equivalent to another series of dated sums. We also draw your attention to the fact that in the curiosities from Grandpa Taras to this paragraph, inquisitive students can find information about the equivalence relation and its application not only in financial mathematics, but also in the mathematics course material known to 8th-grade students - vectors on the plane, similar triangles, etc.

The theoretical material of the paragraph "Dated amounts. Equivalent amounts at a given interest rate" is also mostly new for mathematics teachers. Therefore, the book for teachers (Shkolnyi et al., 2025b) provides solutions to all problems for work in the "gym" class of sufficient and high level, as well as individual problems of intermediate and elementary levels. This facilitates the work of teachers and contributes to their better understanding of the given material, making it possible to convey this material to students adequately and without distortion.

CONCLUSIONS AND PROSPECTS FOR FURTHER RESEARCH

As shown by the survey of students during the textbook probation (Shkolnyi et al., 2025a), and the survey of mathematics teachers who conducted this probation, the above-mentioned approaches to teaching students the basics of financial literacy are well received by adolescents. According to this survey, the vast majority of students (87%) understood the relevance of studying the material of the section "Fundamentals of Financial Literacy" in grade 8. All the surveyed teachers themselves understood the relevant theoretical material well, and as a result of proper cooperation with the textbook's author team and with the help of the teacher's book, this process did not cause them significant difficulties. According to the control measures after the topic, 12% of all students mastered the material of the section "Fundamentals of Financial Literacy" at a high level, 26% at a sufficient level, 44% at an average level, and only 18% at an initial level. In our opinion, for a fundamentally new educational material, this is a notable achievement, which demonstrates that the material is accessible and understandable to the majority of students who have studied it.

Of course, the number of teachers and students who conducted the testing during only one academic year (18 teachers and about 600 students) does not yet provide statistically sound grounds to unequivocally state that the educational material on financial literacy in mathematics lessons in the 8th grade of the National Secondary School has been successfully mastered by students, and the corresponding key competence has been formed. This requires longer-term studies, particularly on the level of residual knowledge on financial literacy among the same students in the 9th grade, which will be conducted in the next academic year. Also, in our opinion, the study of the material of the section "Basics of Financial Literacy" by eighth-graders will contribute to their better understanding of the topic "Accumulated Payments (Annuities)", which is planned for study in the 9th grade according to the model educational program (Vasylyshyn et al., 2023). However, we believe that the probation of the author's educational materials conducted in the 2024-2025 academic year in a case study mode gives significant grounds to hope that the methodological approaches described in the article to studying the basics of financial literacy in the 8th grade of the National Secondary School are useful and will ensure the proper formation of the relevant key competence of students, as provided for by the New Ukrainian School Concept and the State Standard of Basic Secondary Education.

CONFLICT OF INTEREST

The authors declare no financial, personal, or other interests that could be considered a potential conflict of interest regarding the publication of this article.

FUNDING SOURCES

This research did not receive any specific grant from funding agencies in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

DATA AVAILABILITY

This is a theoretical study and does not involve the use of any additional datasets.

USE OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE (AI) TOOLS

AI tools were not used in the writing of this work.

REFERENCES

- Amagir, A., Groot, W., van den Brink, H.M., Wilschut, A. (2020). Financial literacy of high school students in the Netherlands: knowledge, attitudes, self-efficacy, and behavior, *International Review of Economics Education*, 34, <https://doi.org/10.1016/j.iree.2020.100185>.
- Bespalko, I., Voytycka L., Tryhub, O., Rolik V. (2023). *Modelna navchalna prohrama "Pidpryyemnyctvo i finansova hramotnist. 8-9 klasy. [Model educational program "Entrepreneurship and financial literacy. Grades 8-9."]*. Retrieved from <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2024/Model.navch.prohr.5-9.klas-2024/30-12-2024/pidpryyem-finans-hram-8-9-kl-kuznyetsova-ta-in-30-12-2024.pdf> (in Ukrainian)
- Cabinet of Minister of Ukraine (2018). *Derzhavnyi standart pochatkovoyi osvity. [State standard of primary education]*. Retrieved from <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/688-2019-n#Text>. (in Ukrainian)
- Cabinet of Minister of Ukraine (2020). *Derzhavnyi standart bazovoyi seredniyoi osvity. [State standard of basic secondary education]*. Retrieved from <https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-devaki-pitannya-derzhavnih-standartiv-povnoyi-zagalnovi-seredniyoi-osviti-i300920-898>. (in Ukrainian)
- Cabinet of Minister of Ukraine (2024). *Derzhavnyi standart profilnoyi seredniyoi osvity. [State standard of profiled secondary education]*. Retrieved from <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/851-2024-n#Text> (in Ukrainian)
- Cameron, M.P., Calderwood, R., Cox, A., Lim, S., Yamaoka, M. (2014). Factors associated with financial literacy among high school students in New Zealand. *International Review of Economics Education*, 16(A), 12-21, <https://doi.org/10.1016/j.iree.2014.07.006>.
- Kyzyma, T. et. al. (2017). *Metodyka vykladannia finansovoyi hramotnosti. Navchalnyi posibnyk. [Methodology of teaching financial literacy. Textbook]*. Ternopil. FOP Osadcha Yu.V. (in Ukrainian)
- Matiash, O., & Shkolnyi, O. (2025). Teaching mathematics under extreme condition: Ukrainian realities and experience. *Mathematics and Informatics*, 68(2), 204-221.
- MES of Ukraine (2016). *Nova ukrayinska shkola. Konceptualni zasady regormuvannia seredniyoi shkoly [New Ukrainian School. Conceptual Principles of Secondary School Reform]*. Retrieved from <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/nova-ukrayinska-shkola-compressed.pdf> (in Ukrainian)
- OECD (2024). Shaping students' financial literacy: The role of parents and socio-economic backgrounds, *PISA in Focus*, No. 126, OECD Publishing, Paris. <https://doi.org/10.1787/c3f3dc74-en>
- Pysmennyi, V. (2023). *Finansova hramotnist (riven standartu). Pidruchnyk dlia 10 (11) klasy. [Financial literacy (standard level). Textbook for 10th (11th) grade]*. Ternopil. Aston. (in Ukrainian)
- Shkolnyi, O. (2023). New approach to studying mathematics in the 7th grade within the New Ukrainian School project. In *"Educația în contextul provocărilor societale: paradigme, inovații, transfer tehnologic: Materialele Conferinței științifice naționale cu participare internațională, 17 noiembrie 2023, Chișinău"*. Chișinău. Universitatea Pedagogică de Stat "Ion Creangă" din Chișinău.
- Shkolnyi, O., Nelin, Ye., Mylianyk, A., & Prostavkova, Yu. (2024). *Matematyka: pidruchnyk integrovanooho kursu dlia 7 klasy (u 2 chastynah) [Mathematics: integrated course textbook for the 7th grade (in 2 parts)]*. Kharkiv. Ranok. (in Ukrainian)
- Shkolnyi, O., Nelin, Ye., Mylianyk, A., & Prostavkova, Yu. (2025). *Matematyka: pidruchnyk integrovanooho kursu dlia 8 klasy (u 2 chastynah) [Mathematics: integrated course textbook for the 8th grade (in 2 parts)]*. Kharkiv. Ranok. (in Ukrainian)
- Shkolnyi, O., Nelin, Ye., Mylianyk, A., & Prostavkova, Yu. (2024). *Matematyka. 7 klas. Metodychnyi posibnyk dlia vchytelia. [Mathematics. Grade 7. Methodological guide for the teacher]*. Kharkiv. Ranok. (in Ukrainian)
- Shkolnyi, O., Nelin, Ye., Mylianyk, A., & Prostavkova, Yu. (2025). *Matematyka. 8 klas. Metodychnyi posibnyk dlia vchytelia. [Mathematics. Grade 7. Methodological guide for the teacher]*. Kharkiv. Ranok. (in Ukrainian)
- Shkolnyi, O., Nelin, Ye., Mylianyk, A., & Prostavkova, Yu. (2024). *Matematyka. 7 klas. Zbinyk zadach dlia formuvalnoho ta pidsumkovoho ociniuvannia. [Mathematics. Grade 7. Collection of problems for formative and summative assessment]*. Kharkiv. Ranok. (in Ukrainian)
- Smovzhenko, T. et. al. (2020). *Ekonomika ta finansy. 9 klas. Posibnyk dlia vchytelia [Economics and Finance. Grade 9. Teacher's Guide]*. Kyiv. State Higher Educational Institution "University of Banking". (in Ukrainian)
- Sohn, S-H., Joo, S-H., Grable, J.E., Lee, S., & Kim, M. (2012). Adolescents' financial literacy: The role of financial socialization agents, financial experiences, and money attitudes in shaping financial literacy among South Korean youth, *Journal of Adolescence*, 35(4), 969-980, <https://doi.org/10.1016/j.adolescence.2012.02.002>.
- Vasylyshyn, M., Mylianyk, A., Pratsiovytyi, M., Prostavkova, Yu., & Shkolnyi, O. (2023). *Modelna navchalna prohrama "Matematyka. 7-9 klasy" dlia zakladiv zahalnoi seredniyoi osvity [Model educational program "Mathematics. Grades 7-9" for secondary education institutions]*. Retrieved from <https://osvita.ua/doc/files/news/896/89677/Matematyka-7-9-kl-Vasylyshyn-ta-in-26-07.pdf> (in Ukrainian)
- Vitka, Yu. (2021). *Pidsumkovyi zvit proyecktu USAID "Transformaciya finansovoho sektoru". [Final report of the USAID project "Financial Sector Transformation"]*. Retrieved from <https://www.ibr-ua.info/wp-content/uploads/2021/10/YVitka-Financial-Literacy-in-Ukraine-What-has-changed-in-5-years-ua.pdf> (in Ukrainian)

| Received: 25.09.2025 | Accepted: 30.10.2025 | Published: 28.11.2025 |



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.

ВІЗУАЛІЗАЦІЯ ЗНАНЬ ЗАСОБАМИ ВЕБТЕХНОЛОГІЙ У ФОРМУВАННІ КРИТИЧНОГО МИСЛЕННЯ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ ІНФОРМАТИКИ

Артем ЮРЧЕНКО

Сумський державний педагогічний університет
імені А.С. Макаренка, Україна
a.yurchenko@fizmatsspu.sumy.ua
<https://orcid.org/0000-0002-6770-186X>

Роман МОМОТ ✉

Сумський державний педагогічний університет
імені А.С. Макаренка, Україна
roman.bo95@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0003-0861-1925>

Марія ОСТРОГА

Сумський державний педагогічний університет
імені А.С. Макаренка, Україна
mariia.ostroha@fizmatsspu.sumy.ua
<https://orcid.org/0000-0003-0044-8801>

Олена СЕМЕНІХІНА

Сумський державний педагогічний університет
імені А.С. Макаренка, Україна
e.semenikhina@fizmatsspu.sumy.ua
<https://orcid.org/0000-0002-3896-8151>

VISUALIZATION OF KNOWLEDGE BY WEB TECHNOLOGY IN THE FORMATION OF PRE-SERVICE COMPUTER SCIENCE TEACHERS' CRITICAL THINKING

Artem YURCHENKO

Sumy State Pedagogical University
named after A.S. Makarenko, Ukraine
a.yurchenko@fizmatsspu.sumy.ua
<https://orcid.org/0000-0002-6770-186X>

Roman MOMOT ✉

Sumy State Pedagogical University
named after A.S. Makarenko, Ukraine
roman.bo95@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0003-0861-1925>

Mariia OSTROHA

Sumy State Pedagogical University
named after A.S. Makarenko, Ukraine
mariia.ostroha@fizmatsspu.sumy.ua
<https://orcid.org/0000-0003-0044-8801>

Olena SEMENIKHINA

Sumy State Pedagogical University
named after A.S. Makarenko, Ukraine
e.semenikhina@fizmatsspu.sumy.ua
<https://orcid.org/0000-0002-3896-8151>

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. Підготовка майбутніх учителів інформатики вимагає не лише опанування мов програмування та цифрових сервісів, а й розвитку критичного мислення як здатності аналізувати інформацію, виявляти припущення, оцінювати альтернативи, будувати аргументацію та рефлексувати власні судження. Веборієнтовані засоби візуалізації знань (ментальні та концепт-карти, діаграми, інтерактивні дошки) створюють умови для зовнішньої репрезентації міркування здобувача освіти, однак на практиці часто використовуються як допоміжна наочність, а не як інструмент формування критичного мислення.

Матеріали і методи. Теоретичну основу становить аналіз праць з проблем критичного мислення, цифрової компетентності педагогів, візуалізації знань і використання вебтехнологій в освіті. Емпірична частина ґрунтується на порівняльному педагогічному експерименті з участю контрольних та експериментальних груп здобувачів освіти спеціальності «Середня освіта (Інформатика)», аналізі продуктів їх діяльності.

Результати. Побудовано узагальнену модель інтеграції веборієнтованих засобів візуалізації знань у процес підготовки майбутніх учителів інформатики. Встановлено, що послідовна реалізація моделі інтеграції вебінструментів забезпечує стійку позитивну динаміку всіх показників критичного мислення в експериментальній групі. Емпірично обґрунтовано сукупність педагогічних умов, за яких засоби візуалізації знань найбільш повно реалізують свій потенціал. Показано, що візуальні моделі перестають бути «ілюстрацією» й перетворюються на засіб аналізу, критичного перегляду та самокорекції міркувань.

ABSTRACT

Formulation of the Problem. The preparation of pre-service informatics teachers requires not only mastering programming languages and digital services but also developing critical thinking, which involves the ability to analyze information, identify assumptions, evaluate alternatives, build arguments, and reflect on one's own judgments. Web-based knowledge visualization tools (mind maps, concept maps, diagrams, interactive whiteboards) create conditions for the external representation of learners' reasoning; however, in practice, they are often used merely as auxiliary visual aids rather than as instruments for fostering critical thinking.

Materials and Methods. The theoretical framework is based on the analysis of studies on critical thinking, teachers' digital competence, knowledge visualization, and the use of web technologies in education. The empirical part relies on a comparative pedagogical experiment involving control and experimental groups of learners majoring in Secondary Education (Informatics). This involves analyzing their learning products (web-based maps, diagrams, and course models).

Results. A generalized model for integrating web-based knowledge visualization tools into the preparation of pre-service informatics teachers was developed. It was established that the consistent implementation of the web-tool integration model ensures a steady, positive dynamic in all critical thinking indicators for the experimental group. A set of pedagogical conditions under which knowledge visualization tools fully realize their potential was empirically substantiated: integrated. It was shown that under these conditions, visual models cease to function as mere "illustrations" and become a means of analysis, critical revision, and self-correction of reasoning.

Висновки. Узагальнена модель інтеграції веборієнтованих засобів візуалізації знань у процес підготовки майбутніх учителів інформатики дає змогу цілеспрямовано розвивати критичне мислення через роботу з фахово релевантними об'єктами – алгоритмами, цифровими ресурсами, моделями освітніх ситуацій, проектами курсів. Виокремлені педагогічні умови можуть бути використані для удосконалення змісту й технологій навчання дисциплін, а також адаптовані до підготовки інших категорій фахівців, для яких візуалізація знань є центральним засобом осмислення складних систем і процесів.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: критичне мислення; веборієнтована візуалізація; концепт-карти; ментальні карти; майбутні учителі інформатики; цифрові засоби; педагогічні умови; візуалізація знань; вища освіта; професійна підготовка вчителів.

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Юрченко А., Момот Р., Острога М., Семеніхіна О. Візуалізація знань засобами вебтехнологій у формуванні критичного мислення майбутніх учителів інформатики. *Фізико-математична освіта*, 2025. Том 40. № 5. С. 80-88. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i5-11>.

Conclusion. The generalized model of integrating web-based knowledge visualization tools into the preparation of pre-service informatics teachers enables the purposeful development of critical thinking through work with professionally relevant objects, such as algorithms, digital resources, models of educational situations, and course projects. The identified pedagogical conditions can be used to improve the content and instructional design of courses related to methods of teaching informatics and educational technologies, and can be adapted for the preparation of other professional categories for whom knowledge visualization is a central means of understanding complex systems and processes.

KEYWORDS: critical thinking; web-based visualization; concept maps; mind maps; pre-service informatics teachers; digital tools; pedagogical conditions; knowledge visualization; higher education; teacher education.

FOR CITATION: Yurchenko, A., Momot, R., Ostroha, M., & Semenikhina, O. (2025). Visualization of knowledge by web technology in the formation of pre-service computer science teachers' critical thinking. *Physical and Mathematical Education*, 40(5), 80-88. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i5-11>.

ВСТУП

Постановка проблеми. Сучасна парадигма професійної підготовки майбутніх учителів інформатики потребує переосмислення дидактичних підходів з огляду на зміну інформаційного середовища, специфіку цифрової культури та зростання вимог до аналітичного мислення педагога. Йдеться не лише про опанування мов програмування чи сервісів, а про здатність інтерпретувати й оцінювати інформацію, будувати та перевіряти аргументи, приймати обґрунтовані рішення в умовах невизначеності. У науковій літературі критичне мислення трактується як усвідомлений, цілеспрямований тип мислення, що поєднує інтерпретацію, аналіз, оцінювання, пояснення та саморегуляцію суджень. У педагогічних дослідженнях його розвиток зазвичай описують через низку показників: уміння ставити запитання до інформації й виявляти приховані припущення, логічно структурувати міркування, оцінювати силу доказів, порівнювати альтернативні позиції, виявляти логічні помилки й суперечності, здійснювати рефлексію щодо власних висновків. Для майбутнього вчителя інформатики ці показники набувають прикладного характеру, оскільки пов'язані з аналізом алгоритмів, цифрових ресурсів, результатів навчальних досліджень та поведінки користувача в інформаційному середовищі.

Візуалізація знань посідає особливе місце серед засобів розвитку критичного мислення, оскільки забезпечує зовнішню репрезентацію складних структур знань і дає змогу «побачити» логіку міркування. Графічне подання інформації сприяє виявленню причинно-наслідкових зв'язків, ієрархії понять, протиріч і прогалів, полегшує порівняння альтернативних рішень та аналіз аргументів. Для критичного мислення важливим є не стільки факт побудови схеми чи карти, скільки процес послідовного уточнення структури, перегрупування елементів, перевірки зв'язків і осмислення того, які висновки випливають із візуальної моделі. Відповідно, показники розвитку критичного мислення можуть фіксуватися через якість побудованих структур (логічність, цілісність, узгодженість), а також через здатність здобувача освіти пояснити власну карту, захистити її від критики та удосконалити внаслідок рефлексії.

У цьому процесі вебтехнології постають не лише як технічний інструмент, а як середовище візуального мислення. До вебтехнологій, що підтримують візуалізацію знань, належать хмарні сервіси створення карт мислення й інтелект-карт, онлайн-платформи для побудови діаграм та логічних схем, інтерактивні дошки спільної роботи, конструктори інфографіки. Їх спільною рисою є можливість багаторівневої інтерактивної репрезентації інформації (додавання шарів, коментарів, посилань), спільне редагування в реальному часі, доступність з різних пристроїв і вбудованість у цифрову інфраструктуру закладу освіти. Для майбутніх учителів інформатики такі інструменти одночасно є засобом навчання, об'єктом вивчення й ресурсом для майбутньої професійної діяльності.

Попри високий потенціал вебтехнологій, у практиці підготовки майбутніх учителів інформатики все ще спостерігається недостатня узгодженість між цілями розвитку критичного мислення й реальними сценаріями використання інструментів візуалізації. Цифрові сервіси часто застосовуються епізодично, як зручний спосіб подати вже структурований викладачем матеріал, а не як інструмент проблематизації, пошуку альтернатив, побудови й перевірки власних гіпотез здобувачів освіти. Нерозробленість педагогічно обґрунтованих моделей інтеграції вебінструментів у курси педагогіки, методики навчання інформатики, освітнього проектування ускладнює цілеспрямоване формування таких показників критичного мислення, як аргументованість суджень, виявлення припущень, аналіз джерел та рефлексія. Це зумовлює потребу у спеціальному дослідженні, спрямованому на окреслення педагогічного потенціалу візуалізації, розроблення узагальненої моделі інтеграції вебінструментів у процес формування критичного мислення майбутніх учителів інформатики та визначення умов, за яких засоби візуалізації знань стають дієвим ресурсом розвитку аналітичних і рефлексивних умінь.

Аналіз актуальних досліджень. Проблематика розвитку критичного мислення у вищій освіті загалом і в підготовці вчителів зокрема посідає помітне місце в міжнародному науковому дискурсі. Узагальнене визначення критичного мислення, сформульоване експертною групою під керівництвом Р. Фасіоне, зводиться до цілеспрямованого саморегульованого судження, яке базується на інтерпретації, аналізі, оцінюванні та поясненні, доповнених самокорекцією міркувань (Facione, 1990). У подальших роботах автор уточнює структуру критичного мислення через набір

когнітивних умінь (аналіз, інтерпретація, оцінювання, пояснення, саморегуляція) і диспозицій (відкритість до нових доказів, схильність до обґрунтованого сумніву, відповідальність за власні судження) (Facione, 2013). Для підготовки вчителя інформатики це означає, що критичне мислення пов'язане не лише з логічністю міркувань, а й із здатністю оцінювати цифрові ресурси, прозорість алгоритмів, надійність джерел та етичні наслідки використання технологій.

Теоретичні засади використання візуалізації знань як засобу розвитку критичного мислення пов'язані насамперед із концептуальними картами та спорідненими графічними моделями. Класичні праці (Novak & Gowin, 1984) розглядають концепт-карти як інструмент організації й репрезентації знань у вигляді вузлів і зв'язків, що фіксують відношення між поняттями й забезпечують перехід від механічного засвоєння до осмисленого навчання. Подальші теоретичні огляди підкреслюють метакогнітивний характер таких схем: вони дають змогу здобувачеві освіти зробити явную власну «карту» предметної галузі, виявити прогалини, суперечності й хибні зв'язки, а викладачеві – діагностувати глибину розуміння й стратегії мислення (Ausubel, 2000).

Емпіричні дослідження у різних галузях знань демонструють зв'язок між побудовою концепт-карт і розвитком критичного мислення. У низці робіт, виконаних у медсестринській освіті, концептуальне картування застосовано як інструмент оцінювання й формування вмінь аналізувати клінічні ситуації, виявляти причинно-наслідкові зв'язки та аргументувати професійні рішення; результати засвідчили підвищення показників критичного мислення в експериментальних групах порівняно з контрольними (Senita, 2008). N. Dabbagh, аналізуючи комп'ютерні інструменти побудови концепт-карт (Inspiration, SemNet), показує, що їх використання переводить діяльність здобувачів освіти на рівень реорганізації знань, побудови гіпотез і перевірки аргументів, що безпосередньо пов'язано з критичним мисленням (Dabbagh, 2001). Дослідження, присвячені інтелект-картам, також фіксують зростання здатності здобувачів освіти встановлювати зв'язки між ідеями, бачити альтернативи та обґрунтовувати власну позицію, коли побудова карт супроводжується обговоренням і рефлексією (Thoreau, 2016).

Окрема лінія досліджень стосується саме цифрових та веборієнтованих інструментів візуалізації. Aşıksoy (2019) показала, що комп'ютерне концепт-картування у курсах фізики підвищує змістовну глибину навчання, сприяє інтеграції нових знань зі вже наявними й активізує осмислене опрацювання матеріалу. Сучасні метааналітичні огляди в STEM-освіті (Wang et al., 2025) засвідчують, що використання концепт-карт у цифровому форматі позитивно впливає на академічні досягнення та розвиток вищих рівнів мислення, зокрема аналізу й синтезу, а ефекти є статистично значущими для різних вікових груп і предметів. Дослідження цифрових інтелект-карт у підготовці фахівців медичної галузі показують, що хмарні сервіси підсилюють креативність, критичне мислення й клінічне судження, особливо коли завдання передбачають порівняння альтернативних рішень і колективне редагування карт (Ibrahim & Hendy, 2025).

Паралельно формується корпус робіт, присвячених інструментам візуалізації у середовищі систем управління навчанням та інших вебплатформах. Описані в літературі інтерактивні засоби візуалізації в LMS (дашборди активності, графі взаємодії, динамічні діаграми) свідчать про потенціал для підтримки аналітичної діяльності здобувачів освіти, оскільки дають змогу досліджувати освітні дані, бачити тенденції та виявляти проблемні ділянки у власній роботі (Kuosa et al., 2016). У працях, присвячених дизайну інструментів візуалізації для освіти наголошується, що ефективні вебзасоби мають поєднувати інтерактивність, можливість налаштування рівня деталізації, підтримку сценаріїв дослідницького запитування й кооперативної роботи – саме ці характеристики роблять їх корисними для розвитку критичного мислення (Fernandez et al., 2025).

Окрему групу становлять оглядові дослідження, які дають змогу оцінити ефекти концепт-карт як засобу розвитку критичного мислення у різних освітніх галузях. Метааналізи (Barta et al., 2022; Schroeder et al., 2018) засвідчують, що і побудова, і вивчення концепт-карт у середньому покращують навчальні результати, а також пов'язані з позитивною динамікою когнітивних умінь вищого рівня, включно з аналізом, синтезом і критичним оцінюванням інформації. Подібні висновки отримано в систематичному огляді та метааналізі (Yue et al., 2017), присвяченому розвитку критичного мислення майбутніх медичних працівників: використання концепт-карт у навчальних курсах послідовно асоціюється зі зростанням показників критичного мислення за стандартизованими тестами й авторськими шкалами.

Експериментальні й квазіекспериментальні дослідження конкретизують ці результати на матеріалі окремих дисциплін і форматів навчання. У галузі природничої та географічної освіти комп'ютерно підтримуване й колаборативне концепт-картування демонструє позитивний вплив на успішність та на здатність здобувачів освіти встановлювати зв'язки між поняттями й обґрунтовувати висновки (Chang et al., 2017). У медичній освіті доведено, що включення навчання концепт-картам до курсу сприяє зростанню як умінь будувати змістовні структури, так і показників критичного мислення (Bilik et al., 2020; Maryam et al., 2021). Стаття (Sañas et al., 2023) підкреслює, що саме інтерактивні цифрові інструменти концепт-картування створюють умови для поетапного уточнення й перегляду знань, що прямо пов'язано з формуванням критичного мислення. Додатковий акцент на поєднанні картування, співпраці та оцінювання, де концепт-карти розглядаються як структуротвірний елемент навчального середовища, орієнтованого на розвиток критичного мислення (Zandvakili et al., 2019). Сукупність цих результатів підтверджує, що концепт-картування, зокрема в цифровому та веб-орієнтованому форматі, може розглядатися як перспективний інструмент формування критичного мислення, однак потребує чіткого дидактичного проєктування.

Водночас у дослідженнях, зосереджених на професійній підготовці вчителів, акценти здебільшого зміщені на загальну цифрову компетентність або на використання окремих сервісів як засобів ілюстрації навчального матеріалу. Наявні праці не завжди розглядають візуалізацію на основі вебтехнологій (вебвізуалізацію) як цілеспрямований інструмент формування критичного мислення майбутніх учителів, а тим більше майбутніх учителів інформатики, для яких візуальні моделі алгоритмів, структур даних, архітектури програм є повсякденною професійною реальністю. У наявних роботах недостатньо описані педагогічні моделі, що поєднують: а) добір специфічних вебінструментів візуалізації знань; б) формулювання завдань, орієнтованих на виявлення припущень, аналіз доказів і порівняння альтернатив; в) організацію співпраці й рефлексії здобувачів освіти.

Отже, попри значну кількість досліджень, які підтверджують ефективність концепт- і інтелект-карт, а також цифрових засобів візуалізації для розвитку складних когнітивних умінь майбутніх фахівців, малодослідженим залишається питання розроблення узагальненої моделі інтеграції вебінструментів візуалізації у освітній процес підготовки майбутніх учителів інформатики саме з метою розвитку їх критичного мислення. Потребують уточнення також педагогічні умови, за яких такі засоби найбільшою мірою сприяють формуванню показників критичного мислення – від уміння структурувати інформацію й будувати обґрунтовані аргументи до здатності рефлексувати власні когнітивні стратегії. Саме заповненню цих прогалин присвячене подальше дослідження

МЕТА І МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою дослідження є теоретично обґрунтувати й розробити узагальнену модель інтеграції вебтехнологій візуалізації знань у процес формування критичного мислення майбутніх учителів інформатики, а також окреслити педагогічні умови, за яких такі засоби максимально сприяють розвитку аналітичних, оціночних і рефлексивних умінь здобувачів освіти.

Для досягнення поставленої мети застосовано комплекс **методів** наукового пізнання. На теоретичному рівні використано аналіз, синтез, порівняння та узагальнення наукових джерел, що стосуються проблематики критичного мислення, візуалізації знань, цифрових та вебтехнологій у підготовці вчителів. Окремо здійснено структурно-функціональний аналіз підходів до формування критичного мислення майбутніх учителів інформатики з метою виокремлення цілей, змістових ліній, типових завдань і засобів візуалізації, які вже застосовуються або можуть бути адаптовані до цифрового середовища. Це дозволило уточнити систему показників розвитку критичного мислення, релевантних саме для галузі інформатичної освіти (уміння виявляти припущення в алгоритмах, аналізувати структуру цифрових ресурсів, оцінювати прозорість і надійність даних тощо).

На рівні концептуального моделювання було побудовано узагальнену модель інтеграції вебінструментів візуалізації знань у процес формування критичного мислення.

Емпіричну складову дослідження характеризують узагальнені кейси впровадження вебзасобів візуалізації у дисциплінах, що забезпечують підготовку майбутніх учителів інформатики (методика навчання інформатики, освітні технології, проектування цифрового освітнього середовища), а також на аналізі продуктів діяльності здобувачів освіти. Використано методи педагогічного спостереження за роботою здобувачів освіти з такими сервісами, як Coggle, Miro, Lucidchart, аналіз і порівняння створених ними концепт- та інтелект-карт, схем алгоритмів і моделей навчальних ситуацій.

У межах емпіричної частини дослідження у 2024 році було організовано порівняльний педагогічний експеримент із залученням контрольної (21 здобувач) та експериментальної (18 здобувачів) академічних груп спеціальності «Середня освіта (Інформатика)». Контрольні групи працювали у традиційній організації освітнього процесу: веборієнтовані засоби візуалізації використовувалися епізодично, переважно для відтворення вже структурованого викладачем матеріалу, а інструкції мали переважно технічний характер. В експериментальних групах було цілеспрямовано впроваджено модель інтеграції вебінструментів як засобів візуалізації: здобувачі освіти отримували інтегровані (техніко-когнітивні) інструкції до роботи з візуальними сервісами, виконували завдання з відкритими формами відповіді, користувалися прозорими шаблонами оцінювання мап, брали участь в організованому обговоренні побудованих структур і вели рефлексивні записи щодо логіки власного міркування.

Показниками критичного мислення були операціоналізовані характеристики візуальних продуктів і супровідних рефлексивних суджень здобувачів освіти: 1) логічність і структурованість мап (наявність чіткої ієрархії понять, коректність причинно-наслідкових та частково-цілісних зв'язків, відсутність внутрішніх суперечностей); 2) повнота й релевантність відображення змісту (ступінь охоплення суттєвих елементів ситуації або задачі, уникнення несуттєвих чи випадкових деталей); 3) опрацювання альтернатив (кількість і якість гілок, що представляють різні варіанти рішень, позицій чи інтерпретацій, наявність переходів «якщо – то» між ними); 4) маркування припущень і проблемних зон (виокремлення вузлів, які ґрунтуються на неперевіреніх гіпотезах, фіксація місць невизначеності або браку даних); 5) аргументованість і критичність міркувань (наявність у мапах та усних/письмових коментарях посилань на джерела, приклади, контраргументи, виявлення логічних помилок); 6) рефлексивність (здатність здобувача освіти у рефлексивних записах пояснити зміни у структурі мап, визнати помилки попередніх версій, окреслити власні когнітивні стратегії та їх обмеження). Саме за динамікою цих показників здійснювалося порівняння контрольних та експериментальних груп.

Виокремлення педагогічних умов здійснювалося шляхом поєднання порівняльного аналізу кейсів, контент-аналізу інструкцій до завдань і рефлексивних записів здобувачів освіти та якісного аналізу типових труднощів і успішних стратегій роботи з візуалізаційними інструментами. Повторювані патерни (ситуації, у яких спостерігалось суттєве посилення або, навпаки, ослаблення проявів критичного мислення) групувалися у змістові кластери, що дали підстави сформулювати окремі умови: вимоги до інтегрованих інструкцій, характеристику завдань з відкритими відповідями, параметри шаблонів оцінювання мап, особливості організації обговорення та рефлексії.

До обговорення проміжних результатів і перевірки доцільності виділених педагогічних умов залучалися викладачі (7 осіб), які мають досвід використання засобів візуалізації у роботі з майбутніми учителями інформатики. Їхні висновки дозволили скоригувати формулювання окремих компонентів моделі, уточнити вимоги до інструкцій для здобувачів освіти, до організації обговорення побудованих карт і до рефлексивних завдань. Отримані емпіричні дані інтерпретувалися в логіці порівняльного аналізу кейсів, зі співвіднесенням виявлених тенденцій із теоретично обґрунтованими показниками розвитку критичного мислення

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Узагальнена модель інтеграції вебтехнологій візуалізації знань у процес формування критичного мислення майбутніх учителів інформатики передбачає послідовну взаємодію кількох блоків: цільового, змістового, технологічного

та оцінювально-рефлексивного. У цільовому блоці конкретизовано, що вебвізуалізація має не лише підтримувати засвоєння теоретичних відомостей, а й цілеспрямовано розвивати вміння аналізувати інформацію, порівнювати альтернативні рішення, виявляти приховані припущення, будувати й перевіряти аргументи, усвідомлювати межі застосування певних підходів. Саме динаміка цих показників стала основою для інтерпретації результатів. Змістовий блок моделі поєднує теми з методики навчання інформатики, програмування, проектування цифрового освітнього середовища, у межах яких доцільно використовувати концепт- та інтелект-карти, логіко-семантичні схеми, діаграми потоків даних, схеми алгоритмів. Технологічний блок моделі відображає типові етапи роботи здобувача освіти з вебінструментами візуалізації. На етапі проблематизації викладач пропонує навчальну ситуацію (задачу, кейс, фрагмент коду, опис освітньої проблеми), яку неможливо коректно опрацювати без структурування інформації. Далі реалізується конструкторський етап: здобувачі освіти за допомогою обраного вебінструмента створюють первинну візуальну модель, фіксуючи основні поняття, взаємозв'язки, альтернативні гілки рішень. Наступний етап пов'язаний із критичним доопрацюванням карти через запитання викладача та однокласників, порівняння кількох варіантів візуальних рішень, виявлення суперечностей і прогалів. Завершальний оцінювально-рефлексивний етап передбачає самооцінювання побудованих структур за заданими критеріями, фіксацію змін у портфоліо та формулювання висновків щодо того, як трансформувалося розуміння проблеми.

Порівняння вебінструментів у реальних навчальних ситуаціях показало, що різні класи засобів виконують різні дидактичні функції і по-різному впливають на окремі показники критичного мислення. Робота з лінійними ментальними мапами (MindMap, XMind) насамперед позначилася на логічності й структурованості карт та повноті охоплення змісту. В експериментальних групах, де до завдань було додано когнітивні орієнтири, наприкінці курсу зросла кількість мап із чітко вираженою ієрархією понять і коректно побудованими причинно-наслідковими ланцюгами; натомість у контрольних групах переважали схеми, що повторюють структуру конспекту без виокремлення центральних і підтримувальних тез. Інструменти з розгалуженою структурою (Coggle, Lucidchart) найбільш помітно вплинули на показник опрацювання альтернатив: у роботах здобувачів освіти експериментальних груп збільшилася частка карт, де представлено два і більше варіантів вирішення задачі або кілька можливих траєкторій навчального проекту, тоді як у контрольних групах карти залишалися переважно однолінійними. Інтерактивні дошки (Miro, Jamboard), що використовувалися у груповій роботі, сприяли зростанню показників аргументованості й рефлексивності, оскільки вимагали обґрунтувати зміни у структурі карти перед однокласниками та фіксувати власну позицію.

Аналіз кейсів запровадження моделі дав змогу конкретизувати вплив кожної педагогічної умови на динаміку показників критичного мислення. Перша умова, пов'язана з наявністю інтегрованих інструкцій до роботи з візуальними інструментами, проявила себе насамперед у зростанні показників маркування припущень і проблемних зон, а також аргументованості міркувань. У модулі «Алгоритмічні структури» карти контрольних груп, де інструкції були переважно технічними, містили мінімум вузлів, позначених як гіпотези чи спірні місця; здобувачі освіти інколи використовували спеціальні позначення для невизначеності, майже не відділяли факт від припущення. У експериментальних групах, де інструкції містили прямі вказівки на необхідність фіксувати припущення, позначати суперечливі зв'язки, додавати аргументи «за» і «проти», до кінця циклу занять суттєво зросла частка карт, у яких виділено проблемні вузли, наведено контраргументи, а зв'язки супроводжено короткими пояснювальними підписами. Це свідчить, що інструкція з когнітивними орієнтирами прямо підтримує показники критичності й усвідомленого ставлення до власних суджень.

Друга умова, що стосується формулювання завдань із відкритими формами відповіді, забезпечила позитивну динаміку насамперед для показників опрацювання альтернатив і повноти відображення змісту. У кейсі проектування цифрового курсу в контрольних групах завдання на кшталт «відтворити карту етапів за зразком» призвели до однотипних структур, де основну увагу приділяли послідовності кроків, а гілки, що відображають ризики, обмеження чи варіанти адаптації, практично не з'являлися. Після введення у експериментальних групах запитань відкритого типу («які додаткові ризики можливі», «які альтернативи можна запропонувати для різних груп користувачів», «як зміниться структура курсу за нестачі ресурсів») карти стали значно розгалуженішими. Зросла кількість вузлів, що описують умови застосування рішень, з'явилися гілки, присвячені порівнянню варіантів і поясненню наслідків вибору. Таким чином, завдання з відкритою відповіддю сприяли переходу від репродуктивної візуалізації до дослідницької роботи з альтернативами.

Третя умова – створення прозорих шаблонів оцінювання структур мап – була пов'язана з покращенням показників логічності та структурованості карт, а також аргументованості міркувань. До запровадження рубрик у курсі «Цифрове освітнє середовище закладу освіти» здобувачі освіти здебільшого орієнтувалися на зовнішній вигляд мапи; у рефлексивних записах переважали згадки про «зручність сервісу» чи «надлишок елементів», а не про змістові прогалини. Після введення шаблонів, де окремими шкалами оцінювалися повнота охоплення суттєвих аспектів, логічність зв'язків, наявність альтернатив і контраргументів, здобувачі освіти почали систематично перевіряти власні карти на відповідність цим критеріям. У фінальних роботах експериментальних груп зменшилася кількість «завислих» вузлів без зв'язків, посилилася структурна впорядкованість, а в рефлексіях з'явилися посилання на конкретні критерії («бракує аргументів проти», «не всі стейкхолдери враховані в структурі»). Це дає підстави стверджувати, що шаблони оцінювання підвищують усвідомленість щодо якості логічної структури та аргументації.

Четверта умова – організація обговорення побудованих карт між здобувачами освіти – забезпечила зрушення у показниках аргументованості та рефлексивності, а також сприяла глибшому опрацюванню альтернатив. У кейсі групового аналізу проекту «Впровадження шкільної платформи для вивчення програмування» у контрольному варіанті індивідуально створені мапи залишалися без публічної презентації; зміни від одного завдання до іншого мали переважно косметичний характер. Натомість у експериментальних групах, де карти демонструвалися на спільній дошці, обговорювалися в малих групах, а кожен учасник мав аргументувати свою структуру й реагувати на запитання однокласників, було зафіксовано інтенсивне оновлення моделей: додавання гілок, що відображають погляди різних стейкхолдерів, перегрупування етапів, уточнення критеріїв успіху. Рефлексивні записи показали, що здобувачі освіти

почали усвідомлювати вплив критичних запитань одногрупників на власне мислення, відзначали випадки, коли доводилося переглядати початковий план під впливом аргументів інших. Це свідчить, що обговорення виступає каталізатором як для аргументованості, так і для здатності до самокорекції.

П'ята умова – систематична рефлексія щодо логіки власного міркування – найбільш помітно вплинула на показник рефлексивності, а також опосередковано підтримала розвиток інших показників. У курсі «Методика навчання інформатики» цифрове портфоліо з проміжними версіями мап і короткими рефлексивними нотатками дало змогу простежити еволюцію мислення окремих здобувачів освіти. У групах без обов'язкової рефлексії карти змінювалися, але здебільшого без явного усвідомлення причин таких змін: здобувачі освіти інколи пов'язували правки у структурі з новими аргументами чи виявленими суперечностями. Натомість у експериментальних групах у записах регулярно з'являлися міркування на кшталт: «прибрала цю гілку, бо не могла підкріпити її прикладами», «позначив вузол як припущення, оскільки немає достатніх даних», «додав альтернативу, про яку раніше не думав». Така динаміка свідчить про формування установки на перевірку власних висновків і готовність переглядати структуру міркування, що є суттю рефлексивного виміру критичного мислення.

Узагальнення отриманих результатів дозволяє стверджувати, що саме в експериментальних групах спостерігалася стійка позитивна динаміка за всіма визначеними показниками критичного мислення, тоді як у контрольних групах зміни мали фрагментарний характер і здебільшого стосувалися лише зовнішньої організації мап. Отже, запропонована модель інтеграції вебінструментів у поєднанні з виокремленими педагогічними умовами переводить візуалізацію знань із рівня технічного засобу подання інформації на рівень дієвого механізму формування логічності, повноти, критичності та рефлексивності мислення майбутніх учителів інформатики.

ОБГОВОРЕННЯ

Отримані результати загалом узгоджуються з уявленням про критичне мислення як про цілеспрямоване саморегульоване судження, що поєднує інтерпретацію, аналіз, оцінювання, інференцію та пояснення, доповнені самокорекцією міркувань (Facione, 1990). Виокремлені й операціоналізовані в дослідженні показники – логічність і структурованість візуальних моделей, повнота й релевантність відображення змісту, опрацювання альтернатив, маркування припущень і проблемних зон, аргументованість та рефлексивність – виявилися чутливими до змін в організації роботи з веборієнтованими засобами візуалізації. Позитивна динаміка цих показників у експериментальних групах свідчить, що запропонована модель інтеграції вебінструментів справді «вбудовує» в освітній процес ті компоненти критичного мислення, які в теоретичних роботах описуються переважно на абстрактному рівні.

Результати підтверджують висновки досліджень, у яких концепт-карти й споріднені графічні схеми трактуються як інструменти зовнішньої репрезентації знань, що сприяють переходу від механічного відтворення інформації до осмисленого навчання (Novak & Gowin, 1984). У нашому випадку це проявилось в тому, що в експериментальних групах здобувачі освіти поступово переходили від «карти-конспекту», яка лише повторює структуру лекційного матеріалу, до карт, що містять альтернативні гілки рішень, явне маркування припущень, позначення проблемних вузлів і логічних розгалужень. Така еволюція візуальних продуктів збігається з уявленням про концепт-карти як метакогнітивний інструмент, який дозволяє зробити явними власні когнітивні процеси і створює умови для їх рефлексивного перегляду.

Водночас отримані дані уточнюють зроблені раніше висновки щодо ролі цифрових інструментів візуалізації. У роботах, присвячених застосуванню комп'ютерних засобів для побудови концепт-карт (Dabbagh, 2001; Aşıksoy, 2019 та ін.), підкреслюється, що перехід до цифрового формату посилює вплив завдяки інтерактивності, можливості швидкого редагування та співпраці. У проведеному нами дослідженні було показано, що сам по собі вебформат ще не гарантує розвитку критичного мислення: у контрольних групах, де ті самі сервіси використовувалися переважно для репродуктивних завдань, позитивні зрушення стосувалися здебільшого зовнішньої впорядкованості карт, а не глибини аргументації чи роботи з альтернативами. Це дає підстави стверджувати, що вирішальним чинником є не технологія як така, а спосіб її дидактичного вбудовування.

Виокремлені педагогічні умови дозволяють поглибити наявні у літературі уявлення про механізми дії засобів візуалізації. Більшість емпіричних робіт, у яких зафіксовано позитивний вплив концепт-карт на критичне мислення (насамперед, у медичній освіті та інших професійних галузях), зосереджуються на порівнянні «з/без карт», часто не деталізуючи параметри завдань, характер інструкцій, процедури обговорення й оцінювання. У нашому дослідженні було показано, що інтегровані інструкції змінюють спосіб використання інструмента: здобувачі освіти починають сприймати карту як «мову» опису аргументів, припущень і суперечностей, а не як декоративну схему. Завдання з відкритими формами відповіді виявилися критично важливими для активації пошуку альтернатив, а прозорі шаблони оцінювання – для зміщення фокуса уваги з «красивості» карти на логічну виваженість і обґрунтованість.

Особливого значення набуває результат, пов'язаний із організацією обговорення побудованих карт і систематичною рефлексією. Погляди на критичне мислення як на соціально опосередковане явище, що формується в діалозі й взаємній аргументації, є усталеними для підходів, які орієнтуються на соціальний конструктивізм. У проведеному дослідженні візуалізація знань у поєднанні з груповим обговоренням дозволила конкретизувати, як саме відбувається цей перехід від індивідуального судження до спільної реконструкції міркування: критичні запитання одногрупників у буквальному сенсі вписувалися в карту через додавання нових гілок, об'єднання вузлів, зміну статусу певних елементів із «фактів» на «припущення». Рефлексивні записи в цифровому портфоліо демонстрували, що здобувачі освіти починають відстежувати власні когнітивні патерни (схильність до лінійних структур, уникання альтернатив, ігнорування суперечностей) і цілеспрямовано їх коригувати, що відповідає ідеї саморегуляції як важливої складової критичного мислення.

Варто підкреслити й специфіку отриманих результатів саме для підготовки майбутніх учителів інформатики. На відміну від багатьох досліджень, де концепт-карти використовуються переважно для візуалізації фактологічного

матеріалу, у нашому випадку об'єктами візуалізації були алгоритми, структури цифрових ресурсів, моделі освітніх ситуацій, проєкти цифрових курсів. Це зближує візуальну діяльність здобувачів освіти з типовими професійними завданнями вчителя інформатики, який має вміти структурувати код, архітектуру програмних рішень, логіку цифрових сервісів. Позитивна динаміка показників критичного мислення за такими завданнями свідчить, що веборієнтовані засоби візуалізації можуть розглядатися не лише як загальнодидактичний інструмент, а й як елемент фахової підготовки, який безпосередньо готує здобувача освіти до майбутньої професійної діяльності.

Інтерпретація отриманих результатів у ширшому педагогічному дискурсі дозволяє виявити кілька ключових стратегічних положень щодо впровадження вебтехнологій візуалізації у процес формування критичного мислення в майбутніх учителів інформатики. Передусім, ідеться про необхідність зміщення фокусу у використанні візуальних інструментів від репродуктивного відображення навчального матеріалу до його активного переосмислення, аргументації та порівняння альтернативних варіантів. Тоді вебкарти мислення, логічні схеми й інтерактивні дошки не лише доповнюють текстову чи аудіовізуальну подачу, а виступають середовищем реального конструювання знань.

Аналіз використаних сервісів (Coggle, Miro, Lucidchart тощо) демонструє, що більшість з них орієнтовані на інтуїтивне опанування, а отже можуть бути легко адаптовані до середовища підготовки вчителів. Проте ефективність їх застосування залежить від наявності методичного супроводу, зокрема сценаріїв інтеграції в курси, типових шаблонів візуальних структур, системи оцінювання аргументативної логіки map. Як засвідчено в дослідженнях A. Rozumenko et al. (2024) та M. Drushlyak et al. (2025), застосування візуалізацій стимулює розвиток дослідницьких, аналітичних і комунікативних навичок, особливо в поєднанні з цифровими симуляціями або інтерактивним груповим аналізом.

Візуалізація в процесі професійної підготовки стає інструментом зовнішньої когнітивної репрезентації її застосування дозволяє студенту побачити логіку власного мислення, визначити суперечності або логічні прогалини, розвинути рефлексію. Саме ці аспекти відповідають за формування критичного мислення як ключового компоненту педагогічної готовності до роботи в умовах інформаційного переважання, фрагментарності знань і багатоваріантності навчальних рішень. Застосування вебвізуалізації сприяє розвитку в майбутніх учителів навичок проєктування цифрового контенту що, у свою чергу, формує здатність створювати освітні ресурси з урахуванням логіки сприймання, аналітичного потенціалу учня й принципів навчального дизайну.

Окрему увагу слід приділити ролі цифрової культури викладача, що в умовах підготовки майбутніх педагогів є не лише прикладом, а й детермінантою успішної інтеграції технологій. Як зазначає С. Redecker (2017) у рамках DigCompEdu, критичне використання цифрових ресурсів, зокрема візуальних, є важливим елементом професійної цифрової компетентності. Викладач, який вміє моделювати мислення через карти й логічні схеми, фактично демонструє культурну норму інтелектуального поведіння з інформацією, яку студент засвоює як модель майбутньої професійної поведінки.

Важливим стратегічним висновком дослідження є те, що вебтехнології візуалізації доцільно інтегрувати не як окрему методику, а як наскрізний компонент навчального процесу, який супроводжує основні етапи від постановки проблеми до рефлексії та самооцінювання. В умовах підготовки вчителів інформатики це має особливе значення, адже студенти самі мають навчитися перетворювати інформаційні ресурси на структуровані знання, які здатні транслювати далі до учнів, колег, проєктних груп. Порівняння з результатами Bilik et al. (2020), Maryam et al. (2021), Chang et al. (2017), Saftas et al. (2023) і Zandvakili et al. (2019) дає змогу точніше окреслити вклад нашого дослідження. Якщо в названих роботах головна увага приділяється підтвердженню ефекту «наявності/відсутності» концепт-карт або порівнянню різних організаційних форм їх використання, то в нашому випадку акцент зміщено на опис сукупності умов, які роблять вебвізуалізацію знань дієвим механізмом формування критичного мислення. Інтегровані інструкції, відкриті завдання, рубрики оцінювання, обговорення карт та рефлексивні портфоліо дозволяють поєднати ті елементи «картування», «співпраці» та «оцінювання», на які вказує модель (Zandvakili et al., 2019), але вже у структурі спеціально розробленої моделі підготовки майбутніх учителів інформатики. Це розширює поле застосування результатів попередніх досліджень і демонструє, як узагальнені ефекти концепт-картування можуть бути реалізовані в конкретній професійно орієнтованій освітній програмі.

Додатково отримані результати логічно вписуються в ширший європейський дискурс щодо цифрової компетентності педагогів. У рамках DigCompEdu цифрова компетентність викладача трактується не лише як уміння користуватися інструментами, а як здатність педагогічно доцільно інтегрувати цифрові засоби для розвитку критичного мислення, інформаційної гігієни та відповідального використання ІКТ здобувачами освіти (Redecker, 2017). Показники, за якими у нашому дослідженні оцінювався розвиток критичного мислення (логіка, опрацювання альтернатив, маркування припущень, рефлексія), корелюють з компонентами педагогічної цифрової компетентності, пов'язаними з аналізом інформації та спрямованим використанням цифрових інструментів для підтримки мислення. Це добре узгоджується з результатами досліджень, де критичне мислення та інформаційна гігієна молоді розглядаються як вразлива зона, оскільки самооцінка власних умінь часто істотно розходиться з реальним рівнем володіння ними (Rudenko et al., 2025). У цьому сенсі розроблена нами модель інтеграції вебінструментів для візуалізації знань може розглядатися як конкретний механізм «перекладу» рамкових вимог DigCompEdu у щоденну практику підготовки майбутніх учителів інформатики.

Важливим є також зіставлення наших результатів із дослідженнями, у яких розвиток критичного мислення забезпечується через різні формати цифрової діяльності – симуляції, проєктування мобільних застосунків, використання засобів візуалізації. ChatGPT-орієнтовані симуляції, описані для підготовки майбутніх учителів математики, показують, що цілеспрямоване зіставлення відповідей ШІ з власними міркуваннями здобувачів освіти сприяє виявленню помилок, перевірці аргументів та формуванню звички не приймати цифровий результат «на віру» (Drushlyak et al., 2025). Дослідження, присвячені проєктуванню мобільних застосунків на основі ШІ й підготовці IT-фахівців до такої діяльності, показують, що інженерні й педагогічні завдання, пов'язані з дизайном і оцінюванням цифрових сервісів, природно вимагають від здобувачів освіти аналізу вимог, оцінки ризиків і переосмислення користувацьких сценаріїв, тобто апелюють до тих самих компонентів критичного мислення, які ми фіксували через візуальні моделі (Diementiev & Semenikhina, 2025; Дементьев, Шамо́ня, & Семеніхіна, 2025). Роботи, присвячені розвитку дослідницьких умінь засобами

візуалізації (Rozumenko et al., 2024) та інформаційно-цифрової культури вчителів через комп'ютерну візуалізацію (Юрченко, Момот, & Семеніхіна, 2024), підтверджують, що візуальні інструменти здатні поєднати аналіз даних, конструювання знання і рефлексію над власними рішеннями. Результати Seleviciene (2023), отримані в ESP-курсах із використанням веборієнтованих інтелект-карт, узгоджуються з нашими висновками: саме завдання дослідницького типу, групова робота з картами й чіткі критерії їх оцінювання забезпечують підвищення рівня критичного мислення. Наше дослідження розширює ці висновки на сферу підготовки майбутніх учителів інформатики, показуючи, що вебзасоби візуалізації можуть стати системним інструментом формування критичного мислення у фахово орієнтованих дисциплінах.

Отже, обговорення результатів у зіставленні з наявними теоретичними й емпіричними напрацюваннями дозволяє зробити кілька узагальнень. По-перше, вебтехнології візуалізації знань здатні підтримувати всі основні компоненти критичного мислення – від аналізу й оцінювання до саморефлексії – за умови, що їх використання спеціально спроектоване через інтегровані інструкції, відкриті завдання, рубрики оцінювання, обговорення та рефлексивне портфоліо. По-друге, новизна запропонованого підходу полягає в переході від питання «чи корисні концепт-карти для критичного мислення» до питання «які саме організаційні й методичні рішення роблять вебвізуалізацію дієвим механізмом формування критичного мислення майбутніх учителів інформатики». По-третє, результати відкривають можливості для подальших досліджень, пов'язаних із кількісною оцінкою ефектів кожної з умов окремо, а також із перенесенням розробленої моделі на інші групи здобувачів освіти та інші предметні галузі.

ВИСНОВКИ

Проведене дослідження дало змогу уточнити уявлення про критичне мислення майбутніх учителів інформатики та окреслити ті аспекти, які на практиці справді піддаються цілеспрямованому формуванню засобами веборієнтованої візуалізації знань. Критичне мислення здобувачів освіти було розглянуто як здатність логічно структурувати інформацію, виявляти й оцінювати припущення, опрацювати альтернативні рішення, будувати аргументацію та здійснювати рефлексію щодо власних міркувань. Операціоналізація цих характеристик через систему показників (структурованість і повнота візуальних моделей, робота з альтернативами, маркування проблемних зон, аргументованість і рефлексивність) дала можливість перейти від загальних декларацій до аналізу реальних змін у продуктах діяльності здобувачів освіти, майбутніх учителів інформатики. Особливо продуктивною така візуальна діяльність виявилася у сферах, безпосередньо пов'язаних із професійними завданнями вчителя інформатики: аналізом алгоритмів, структурою цифрових ресурсів, моделюванням освітніх ситуацій та проектуванням цифрових курсів.

Розроблена узагальнена модель інтеграції вебтехнологій візуалізації знань у процес формування критичного мислення майбутніх учителів інформатики продемонструвала свою ефективність у порівняльному педагогічному експерименті. Її реалізація забезпечила узгодженість між задекларованою метою розвитку критичного мислення, добром навчального змісту, характером завдань і способами аналізу продуктів діяльності здобувачів освіти. Порівняння контрольних та експериментальних груп показало стійку позитивну динаміку за всіма визначеними показниками критичного мислення в тих випадках, коли вебвізуалізація використовувалася не епізодично, а як наскрізний механізм опрацювання навчального матеріалу.

Емпірично обґрунтовано сукупність педагогічних умов, за яких засоби візуалізації знань найбільш повно реалізують свій потенціал у формуванні критичного мислення. До них належать інтегровані інструкції, що поєднують технічні дії з когнітивними орієнтирами; завдання з відкритими формами відповіді, які вимагають пошуку й порівняння альтернатив; прозорі шаблони оцінювання мап, що переводять увагу на логічність і аргументованість структури; організація обговорення побудованих карт між здобувачами освіти; систематична рефлексія, зафіксована в цифровому портфоліо. Саме комбінація цих умов забезпечила перехід від формального використання вебсервісів до їх функціонування як інструментів аналізу й самокорекції міркувань.

Отримані результати мають теоретичне й практичне значення. З теоретичного боку уточнено розуміння ролі веборієнтованої візуалізації у формуванні критичного мислення майбутніх учителів інформатики та запропоновано модель, яка може слугувати основою для подальших досліджень у галузі цифрової педагогіки. З практичного боку сформульовані підходи й умови можуть бути використані під час оновлення змісту й технологій дисциплін, пов'язаних із методикою навчання інформатики, освітніми технологіями, проектуванням цифрового освітнього середовища, а також при розробленні тренінгових програм з розвитку критичного мислення. Перспективним видається подальше вивчення впливу окремих компонентів моделі на різні групи здобувачів освіти, а також перенесення описаних рішень у підготовку фахівців інших спеціальностей, де візуалізація знань поєднується з потребою у високому рівні критичного мислення.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори підтверджують відсутність фінансових, особистих чи інших інтересів, що можуть розглядатися як потенційний конфлікт інтересів щодо публікації цієї статті.

ФІНАНСУВАННЯ

Робота виконана за відсутності фінансової підтримки з боку будь-яких організацій.

ДОСТУПНІСТЬ ДАНИХ

Це теоретико-практичне дослідження не передбачає використання додаткових наборів даних.

ВИКОРИСТАННЯ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Інструменти штучного інтелекту (ChatGPT 5.1) використано для систематизації результатів наукових досліджень та мовному редагуванні анотації до роботи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Diemientiev, Y., & Semenikhina, O. (2025). Development of mobile applications based on artificial intelligence: Current experience and prospects. *Current Science Research Bulletin*, 2(06), 201–207. <https://doi.org/10.55677/csr/b/04-V02I06Y2025>
2. Drushlyak, M., Lukashova, T., Shamonina, V., & Semenikhina, O. (2025). ChatGPT-based simulation helps to develop the pre-service mathematics teachers' critical thinking. *International Journal of Instruction*, 18(1), 153–172. https://www.e-iji.net/dosyalar/iji_2025_1_9.pdf
3. Fernandez, C., Freitas, J. A., Blikstein, P., & de Deus Lopes, R. (2025). The design space of visualization tools for data science education: Literature review and framework for future designs. *International Journal of Child-Computer Interaction*, 43, 100698. <https://doi.org/10.1016/j.ijcci.2024.100698>
4. Ibrahim, R. K., & Hendy, A. (2025). The role of digital mind maps in boosting creativity and critical thinking among nursing students: A quasi-experimental study. *Teaching and Learning in Nursing*. <https://doi.org/10.1016/j.teln.2025.10.026>
5. Kuosa, K., Distanto, D., Tervakari, A., Cerulo, L., Fernández, A., Koro, J., & Kailanto, M. (2016). Interactive Visualization Tools to Improve Learning and Teaching in Online Learning Environments. *International Journal of Distance Education Technologies (IJDET)*, 14(1), 1–21. <https://doi.org/10.4018/IJDET.2016010101>
6. Redecker, C. (2017). *European Framework for the Digital Competence of Educators: DigCompEdu*. Luxembourg: Publications Office of the European Union. <https://doi.org/10.2760/159770>
7. Rozumenko, A., Rozumenko, A., Yurchenko, A., Khvorostina, Y., & Semenikhina, O. (2024). Students' research skills development by using visualization. *International Journal of Information Technology and Computer Science*, 16(6), 1–14. <https://doi.org/10.5815/ijitcs.2024.06.01>
8. Rudenko, Y., Drushlyak, M., Naboka, O., Proshkin, V., & Semenikhina, O. (2025). Development of youth information hygiene skills: The gap between the self-assessment and real state. In E. Smyrnova-Trybulska, N.-S. Chen, P. Kommers, & N. Morze (Eds.), *E-learning and enhancing soft skills* (pp. 61–74). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-82243-8_5
9. Seleviciene, E. (2023). Enhancing students' critical thinking through web-based mind mapping in ESP classes. *Journal of Language and Education*, 9(4), 128–138. <https://doi.org/10.17323/jle.2023.128>
10. Senita, J. (2008). The use of concept maps to evaluate critical thinking in the clinical setting. *Teaching and Learning in Nursing*, 3(1), 6–10. <https://doi.org/10.1016/j.teln.2007.08.002>
11. Thoreau, H. D. (2016). The Mind Map as a Tool for Critical Thinking. *The Toolbox*, 14(5), 1-6. URL: https://sc.edu/nrc/system/pub_files/MindMapasaToolforCriticalThinking.pdf
12. Дем'янюк, Є., Шамонова, В., & Семеніхіна, О. (2025). Підготовка ІТ-фахівців до створення мобільних додатків: огляд актуальних досліджень. *Освіта. Інноватика. Практика*, 13(1), 7–14. <https://doi.org/10.31110/2616-650X-vol13i1-001>
13. Юрченко, А., Момот, Р., & Семеніхіна, О. (2024). Про розвиток інформаційно-цифрової культури вчителів з використанням комп'ютерної візуалізації. *Освіта. Інноватика. Практика*, 12(6), 93–99. <https://doi.org/10.31110/2616-650X-vol12i6-014>

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Diemientiev, Y., & Semenikhina, O. (2025). Development of mobile applications based on artificial intelligence: Current experience and prospects. *Current Science Research Bulletin*, 2(06), 201–207. <https://doi.org/10.55677/csr/b/04-V02I06Y2025>
2. Drushlyak, M., Lukashova, T., Shamonina, V., & Semenikhina, O. (2025). ChatGPT-based simulation helps to develop the pre-service mathematics teachers' critical thinking. *International Journal of Instruction*, 18(1), 153–172. https://www.e-iji.net/dosyalar/iji_2025_1_9.pdf
3. Fernandez, C., Freitas, J. A., Blikstein, P., & de Deus Lopes, R. (2025). The design space of visualization tools for data science education: Literature review and framework for future designs. *International Journal of Child-Computer Interaction*, 43, 100698. <https://doi.org/10.1016/j.ijcci.2024.100698>
4. Ibrahim, R. K., & Hendy, A. (2025). The role of digital mind maps in boosting creativity and critical thinking among nursing students: A quasi-experimental study. *Teaching and Learning in Nursing*. <https://doi.org/10.1016/j.teln.2025.10.026>
5. Kuosa, K., Distanto, D., Tervakari, A., Cerulo, L., Fernández, A., Koro, J., & Kailanto, M. (2016). Interactive Visualization Tools to Improve Learning and Teaching in Online Learning Environments. *International Journal of Distance Education Technologies (IJDET)*, 14(1), 1–21. <https://doi.org/10.4018/IJDET.2016010101>
6. Redecker, C. (2017). *European Framework for the Digital Competence of Educators: DigCompEdu*. Luxembourg: Publications Office of the European Union. <https://doi.org/10.2760/159770>
7. Rozumenko, A., Rozumenko, A., Yurchenko, A., Khvorostina, Y., & Semenikhina, O. (2024). Students' research skills development by using visualization. *International Journal of Information Technology and Computer Science*, 16(6), 1–14. <https://doi.org/10.5815/ijitcs.2024.06.01>
8. Rudenko, Y., Drushlyak, M., Naboka, O., Proshkin, V., & Semenikhina, O. (2025). Development of youth information hygiene skills: The gap between the self-assessment and real state. In E. Smyrnova-Trybulska, N.-S. Chen, P. Kommers, & N. Morze (Eds.), *E-learning and enhancing soft skills* (pp. 61–74). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-82243-8_5
9. Seleviciene, E. (2023). Enhancing students' critical thinking through web-based mind mapping in ESP classes. *Journal of Language and Education*, 9(4), 128–138. <https://doi.org/10.17323/jle.2023.128>
10. Senita, J. (2008). The use of concept maps to evaluate critical thinking in the clinical setting. *Teaching and Learning in Nursing*, 3(1), 6–10. <https://doi.org/10.1016/j.teln.2007.08.002>
11. Thoreau, H. D. (2016). The Mind Map as a Tool for Critical Thinking. *The Toolbox*, 14(5), 1-6. URL: https://sc.edu/nrc/system/pub_files/MindMapasaToolforCriticalThinking.pdf
12. Diemientiev, Y., Shamonina, V., & Semenikhina, O. (2025). Preparing IT specialists for mobile application creating: a review of current research. *Education. Innovation. Practice*, 13(1), 7–14. <https://doi.org/10.31110/2616-650X-vol13i1-001>
13. Yurchenko, A., Momot, P., & Semenikhina, O. (2024). On the development of teachers' information and digital culture using computer visualization. *Education. Innovation. Practice*, 12(6), 93–99. <https://doi.org/10.31110/2616-650X-vol12i6-014>

| Матеріал надійшов до редакції: 18.07.2025 р. | Прийнято до друку: 25.09.2025 р. | Опубліковано: 28.11.2025 р. |



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.

АЛФАВІТНИЙ ПОКАЖЧИК

А		О	
Аду А.....	6	Обенг-Денте В.	6
Апаву Дж.	6	Осадча К.....	44
Б		П	
Босін М.	14	Павлова Н.	53
Бохонов Ю.....	21	Пінчук О.	44
Брославська Г.	14	Р	
Г		Рашевська Н.	44
Глушак О.....	29	Рикова Л.....	14
Грицик Т.	36	С	
Д		Семеніхіна О.....	80
Дубич К.....	53	Семеняка С.	29
З		Слободяник О.....	61
Зінченко Н.	29	Сухіх А.	44
Л		Т	
Литвинова С.	44	Ткач О.....	68
М		Ш	
Момот Р.....	80	Шкільний О.	74
Н		Ю	
Носенко Ю.....	44	Юрченко А.	80

Наукове видання

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА

Науковий журнал

Key title: Fiziko-matematična osvita

Abbreviated key title: Fiz.-mat. osv.

Том 40, № 5

2025

Друкується в авторській редакції
Матеріали подані мовою оригіналу

Відповідальний за випуск

О.В. Семеніхіна

Комп'ютерна верстка

О.М. Удовиченко

Ідентифікатор медіа:

R30-02975

<https://fmo-journal.org/>

Підп. до друку 24.11.2025.

Формат 60x84/8. Гарнітура Calibri. Папір офсетний. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 10,5.

Ум. фарб.-відб. 10,5. Обл.-вид. арк. 11,02. Тираж 50 пр. Вид. №45

Видавець:

Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка

40002, м.Суми, вул.Роменська, 87

Тел. (0542) 68-59-15, (0542) 68-59-72; rector@sspu.edu.ua

Свідоцтво ДК № 231 від 02.11.2000 р.

Виготовлювач:

ФОП Цьома С.П. 40002, м. Суми, вул. Роменська, 100.

Тел.: 066-293-34-29.

Зам. № 60

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:

серія ДК, № 5050 від 23.02.2016.